Marek Kubica, kubica@in.tum.de

Punkteverteilung:

1	2	3	4	Σ

Aufgabe (1)

(a) 1 ist Teiler von 5, da jede Zahl durch 1 teilbar ist. 1 ist keine Primzahl, aber auch keine zusammengesetzte Zahl, da der Begriff erst für Zahlen > 1 definiert ist.

$ggT(986, 987) = 1$

$ggT(78, 240) = 6$

(b) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ wenn $a \times d = b \times c$ (Multiplikation "über kreuz"). Alternativ sind die Brücke ebenfalls gleich wenn $a = c \wedge b = d$. Wenn letzteres nicht der Fall ist, kann es sein, dass die Brüche trotzdem gleich sind, in dem Fall können die Brüche vereinfacht werden indem der Bruch $\frac{a}{b}$ durch $ggT(a, b)$ geteilt wird, der Bruch $\frac{c}{d}$ hingegen durch $ggT(c, d)$. Die so entstanden Brüche $\frac{a_1}{b_1}$ und $\frac{c_1}{d_1}$ können nun auf Gleichheit verglichen werden indem man $a_1 = c_1 \wedge b_1 = d_1$ evaluiert.

Aufgabe (2)

(a) $\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{c}{d}$

gilt immer wenn man die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ so erweitert, dass sie den gemeinsamen Nenner $b \times d$ haben, so dass selbst wenn sie $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ sind, es noch genug $x, y \in \mathbb{N}$ gibt, dass die Aussage wahr ist. Dazu wird $y = b \times d$ angenommen und $x = (c \times d) - 1$, was dazu führt, dass $\frac{x}{y}$ immer ein $\frac{1}{b \times d}$ kleiner ist als $\frac{c}{d}$, jedoch nie kleiner gleich $\frac{a}{b}$.

(b) Schritt 1: Man nehme $a_1, b_1 \in \mathbb{Q}$. Nun berechnet man $\frac{b_1 - a_1}{2}$, welches in der Mitte zwischen a_1 und b_1 ist. Diese Zahl wird nun b_2 genannt.

Schritt 2: Durch das Aufstellen des Termes $\frac{b_2 - a_1}{2}$ kann man wiederrum die Zahl in der Mitte zwischen a_1 und b_2 bilden, die wiederrum immer $\in \mathbb{Q}$ sind.

Schritt n: diese Teilung in immer weiter fortsetzbar.

Aufgabe (3)

Behauptung: Es gibt kein $y \in \mathbb{R}$ so dass $y^2 = 7$. Also auch kein $y \in \mathbb{R}$ so dass $y = \sqrt{7}$.

Annahme: $\sqrt{7}$ ist rational, also durch den Bruch $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ darstellbar.

Beweis:

$\sqrt{7} = \frac{m}{n}$

$7 = \frac{m^2}{n^2}$

$m^2 = 7n^2$

Zerlegung von m, n in Primfaktoren:
$(m_1 \times m_2 \times \dots \times m_a)^2 = 7 \times (n_1 \times n_2 \times \dots \times n_b)^2$
$m_1^2 \times m_2^2 \times \dots \times m_a^2 = 2 \times n_1^2 \times n_2^2 \times \dots \times n_b^2$
$\underbrace{m_1 \times m_1 \times m_2 \times m_2 \times \dots \times m_a \times m_a}_{\text{gerade Anzahl Primfaktoren}} = \underbrace{2 \times n_1 \times n_1 \times n_2 \times n_2 \times \dots n_b \times n_b}_{\text{ungerade Anzahl Primfaktoren, wegen dem}\times 2}$
Kann so nie sein $\Rightarrow$ Widerspruch.

Aufgabe (4)

Um die Ziffer die an Index i steht herauszufinden, muss man die Ziffern an der Stelle $i+1$ kennen, dazu kann man sich einer rekursiven Definition bedienen:

$$c_n = \overbrace{(\underbrace{(a_n + b_n)}_{\text{Summe der Ziffern } a_n, b_n} + (\underbrace{(a_{n+1} + b_{n+1}) - \overbrace{(a_{n+1} + b_{n+1})\%10}^{\text{Einerstelle}})/10}_{\text{Zehnerstelle}})\%10}^{\text{Ziffer } \in \mathbb{N}_0}$$

Zunächst ist es nötig, den Übertrag zu berechnen. Dabei wird die Summe von a_{n+1} und b_{n+1} gebildet. Da diese > 9 sein kann, wird Modulo 10 gerechnet, um die "Einerstelle" zu bekommen. Diese wird dann von der Summe von a_{n+1}, b_{n+1} abgezogen, womit man einen Übertrag von 0 (kein Übertrag) oder 10 ("Eins gemerkt") bekommt. Diese Zahl wird durch 10 geteilt um auf diese Weise den Übertrag von 0 oder 1 zu bekommen. Dieser Übertrag kann nun auf die Summe von a_n, b_n aufaddiert und diese Zahl wiederrum Modulo 10 berechnet um auf ein Intervall von 0 bis 9 zu kommen.