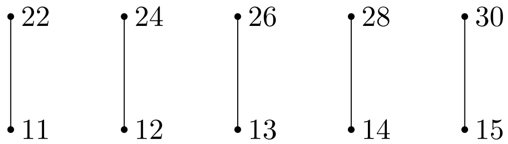
Marek Kubica, kubica@in.tum.de

Punkteverteilung:

1	2	3	4	Σ

Aufgabe (1)

(a) 

(b) Urbild von H ist $\{11, 12, 13, 14, 15\}$, H selbst enthält laut der Definition eines Hasse-Diagrammes keine reflexiven Elemente, und jede der Zahlen aus M wird höchstens von einer anderen Zahl geteilt (jede Zahl in H hat nur eine Kante). Nun erweitert $\mathbb{N}$ die Menge M, aber jedes Element des Urbildes wird schon in M durch H nur auf ein Element des Urbildes abgebildet, somit wird jedes Element aus $\mathbb{N}$ nur von höchstens einer Kante getroffen (die Elemente mit einer Kante sind 22, 24, 26, 28 und 30, alle anderen haben keine Kanten).

Aufgabe (2)

(a)
  a) *reflexiv*: ja, da die Bedingung für die Relation $\leq$ enthält und somit auch gleiche Elemente auf beiden Seiten des Operators erlaubt sind.
  b) *symmetrisch*: nein, da zwar $((5, 1), (6, 2)) \in R$ aber $((6, 2), (5, 1))$ die Bedingung nicht erfüllt und somit $\notin R$
  c) *antisymmetrisch*: ja, da xRy und yRx nur dann gleichzeitig zutreffen wenn $x = y$ (wird durch $\leq$ bedingt).
  d) *transitiv*: ja, da für jedes $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \wedge ((y_1, y_2), (z_1, z_2)) \in R$ gilt, dass auch $((x_1, x_2), (z_1, z_2)) \in R$ ist.
  e) *partielle Ordnung*: ja, da die Ordnung transitiv, reflexiv und antisymmetrisch ist.
  f) *total*: nein, da zwar $(5, 2) \wedge (10, 1) \in M$, aber weder $((5, 2), (10, 1)) \in R$ noch $((10, 1), (5, 2)) \in R$.

(b) Es gibt für jede nichtleere Menge mindestens ein minimales Element bezüglich einer Relation. Da R keine totale Ordnung ist kann es auch mehrere geben, im vorliegenden Fall sind es 5 minimale Elemente, $(5, 1)$, $(4, 3)$, $(3, 5)$, $(2, 7)$ und $(1, 10)$.

Aufgabe (3)

(a)
  a) *GF*: Goethe ist Freund von Margarethe

b) GS: Goethe war in der Stadt
c) GM: Goethe hat Margarethe ermordet
d) SS: Schiller war in der Stadt
e) SM: Schiller hat Margarethe ermordet
f) ShF: Shakespeare ist Freund von Margarethe
g) ShM: Shakespeare hat Margarethe ermordet

Im folgenden wird angenommen dass "nicht leiden können" gleich "war nicht Freund" ist und "mit Margarethe zusammen gesehen" zwar "in der Stadt gewesen" nicht aber "Freund gewesen" ist.

1 $\neg SM \Rightarrow GF \wedge \neg ShF$

2 $\neg GM \Rightarrow \neg GF \wedge \neg GS$

3 $\neg ShM \Rightarrow \neg GS \wedge SS$

$(\neg SM \Rightarrow GF \wedge \neg ShF) \wedge (\neg GM \Rightarrow \neg GF \wedge \neg GS) \wedge (\neg ShM \Rightarrow \neg GS \wedge SS) \wedge((GM \wedge \neg SM \wedge \neg ShM) \vee (\neg GM \wedge SM \wedge \neg ShM) \vee (\neg GM \wedge \neg SM \wedge Shm))$

Nun die drei Möglichkeiten, wer der Mörder ist:

Wenn angenommen wird, dass $SM = 1$, dann sind $GM = 0$ und $ShM = 0$, somit vereinfacht sich die Formel auf $(1 \Rightarrow (\neg GF \wedge \neg GS)) \wedge (1 \Rightarrow (GS \wedge SS))$, wobei aber $\neg GS$ und GS nicht gleichzeitig Wahr sein können. Ist also unmöglich.

Wenn angenommen wird, dass $ShM = 1$, dann sind $GM = 0$ und $SM = 0$, somit vereinfacht sich die Formel auf $(1 \Rightarrow (GF \wedge \neg ShF)) \wedge (1 \Rightarrow (\neg GF \wedge \neg GS))$, wobei sich aber GF und $\neg GF$ gegenseitig ausschließen.

Wenn angenommen wird dass $GM = 1$, dann sind $SM = 0$ und $ShM = 1$, somit vereinfacht sich die Formel auf $(1 \Rightarrow (GF \wedge \neg ShF)) \wedge (1 \Rightarrow (GS \wedge SS))$, was dazu führt dass dafür eine Belegung gefunden werden kann:

a) $GF = 1$
b) $GS = 1$
c) $GM = 1$
d) $SS = 1$
e) $SM = 0$
f) $ShF = 0$
g) $ShM = 0$

(b) Wenn man davon ausgeht, dass es mehrere Mörder geben kann gibt es vier Möglichkeiten wer der Mörder ist.

Schiller und Goethe Mörder: möglich, da Formel zu $1 \Rightarrow (GS \wedge SS)$ vereinfacht wird und dies möglich ist wenn $GS = 1$ und $SS = 1$.

Goethe und Shakespeare Mörder: möglich, da Formel zu $1 \Rightarrow (GF \wedge \neg ShF)$ vereinfacht wird und dies möglich ist, wenn man $GF = 1$ und $ShF = 0$ setzt.

Schiller und Shakespeare Mörder: möglich, da Formel zu $1 \Rightarrow (\neg GF \wedge \neg GS)$ vereinfacht wird und dies möglich wäre wenn $GF = 0$ und $GS = 0$.

Goethe, Schiller und Shakespeare Mörder: möglich da Formel zu $1 \wedge 1 \wedge 1 = 1$ vereinfacht wird und dies bedingungslos möglich ist.

Aufgabe (4)

A	B	C	$\neg((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)) \wedge (A \Rightarrow C)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Der Ausdruck ist für jede Belegung wahr, also allgemeingültig (eine Tautologie).