Marek Kubica, kubica@in.tum.de

Punkteverteilung:

1	2	3	4	Σ

Aufgabe (1)

(a) Annahme: $\beta(1,0,1) = 1$

$\Diamond(x,y,z) \equiv (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg(x \wedge \neg y \wedge z) \wedge \Diamond(x,y,z))$

x	y	z	$(x \wedge \neg y \wedge z)$	$\vee$	$(\neg(x \wedge \neg y \wedge z) \wedge \Diamond(x,y,z))$	
0	0	0	0	$\vee$	$(1 \wedge \Diamond(0,0,0))$	$= \Diamond(0,0,0)$
0	0	1	0	$\vee$	$(1 \wedge \Diamond(0,0,1))$	$= \Diamond(0,0,1)$
0	1	0	0	$\vee$	$(1 \wedge \Diamond(0,1,0))$	$= \Diamond(0,1,0)$
0	1	1	0	$\vee$	$(1 \wedge \Diamond(0,1,1))$	$= \Diamond(0,1,1)$
1	0	0	0	$\vee$	$(1 \wedge \Diamond(1,0,0))$	$= \Diamond(1,0,0)$
1	0	1	1	$\vee$	$(0 \wedge 1)$	$= 1 = \Diamond(1,0,1)$
1	1	0	0	$\vee$	$(1 \wedge \Diamond(1,1,0))$	$= \Diamond(1,1,0)$
1	1	1	0	$\vee$	$(1 \wedge \Diamond(1,1,1))$	$= \Diamond(1,1,1)$

(b) Annahme: $\beta(1,0,1) = 1\beta(1,1,0) = 1$, ansonsten 0.

$\Diamond(x,y,z) \equiv (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg(x \wedge \neg y \wedge z) \wedge \neg(x \wedge y \wedge \neg z) \wedge \Diamond(x,y,z))$

Äquivalenter disjunkter Ausdruck dazu:

$\Diamond(x,y,z) \equiv \underbrace{(x \wedge \neg y \wedge z)}_{\beta(1,0,1)} \vee \underbrace{(x \wedge y \wedge \neg z)}_{\beta(1,1,0)}$

Aufgabe (2)

x	y	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_7	ϕ_8	ϕ_9	ϕ_{10}	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{13}	ϕ_{14}	ϕ_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$\phi_{10} \equiv (\neg x \wedge \neg y) \vee (x \wedge \neg y) \equiv \neg y$

Aufgabe (3)

(a) Zu beweisen: $p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$

p	q	r	$p \Rightarrow (q \vee r)$		$(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$	
0	0	0	$(0 \Rightarrow \cdots)$	$= 1$	$(0 \Rightarrow \cdots) \vee (0 \Rightarrow \cdots)$	$= 1$
0	0	1	$(0 \Rightarrow \cdots)$	$= 1$	$(0 \Rightarrow \cdots) \vee (0 \Rightarrow \cdots)$	$= 1$
0	1	0	$(0 \Rightarrow \cdots)$	$= 1$	$(0 \Rightarrow \cdots) \vee (0 \Rightarrow \cdots)$	$= 1$
0	1	1	$(0 \Rightarrow \cdots)$	$= 1$	$(0 \Rightarrow \cdots) \vee (0 \Rightarrow \cdots)$	$= 1$
1	0	0	$(1 \Rightarrow 0)$	$= 0$	$(1 \Rightarrow 0) \vee (1 \Rightarrow 0)$	$= 0$
1	0	1	$(1 \Rightarrow 1)$	$= 1$	$(1 \Rightarrow 0) \vee (1 \Rightarrow 1)$	$= 1$
1	1	0	$(1 \Rightarrow 1)$	$= 1$	$(1 \Rightarrow 1) \vee (1 \Rightarrow 0)$	$= 1$
1	1	1	$(1 \Rightarrow 1)$	$= 1$	$(1 \Rightarrow 1) \vee (1 \Rightarrow 1)$	$= 1$

Wie man sieht sind die Ergebnisse in der Wahrheitstabelle für beide Seiten identisch, somit ist die rechte und die linke Seite der Gleichung äquivalent.

(b) a) $p = true = 1$

$$\begin{aligned} 1 \Rightarrow (q \vee r) &\equiv (1 \Rightarrow q) \vee (1 \Rightarrow r) \\ 0 \vee (q \vee r) &\equiv (0 \vee q) \vee (0 \vee r) \\ q \vee r &\equiv q \vee r \\ &true \end{aligned}$$

b) $p = false = 0$

$$\begin{aligned} 0 \Rightarrow (q \vee r) &\equiv (0 \Rightarrow q) \vee (0 \Rightarrow r) \\ 1 &\equiv 1 \vee 1 \\ &true \end{aligned}$$

p	q	r	$((p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r))$	$\Leftrightarrow$	$(p \Rightarrow (q \vee r))$	
0	0	0	$(1 \vee 1)$	$\Leftrightarrow$	1	$= 1$
0	0	1	$(1 \vee 1)$	$\Leftrightarrow$	1	$= 1$
0	1	0	$(1 \vee 1)$	$\Leftrightarrow$	1	$= 1$
0	1	1	$(1 \vee 1)$	$\Leftrightarrow$	1	$= 1$
1	0	0	$(0 \vee 0)$	$\Leftrightarrow$	0	$= 1$
1	0	1	$(0 \vee 1)$	$\Leftrightarrow$	1	$= 1$
1	1	0	$(1 \vee 0)$	$\Leftrightarrow$	1	$= 1$
1	1	1	$(1 \vee 1)$	$\Leftrightarrow$	1	$= 1$

Dieser Ausdruck ist für jede Belegung wahr und somit eine Tautologie.

Aufgabe (4)

(a)

$$
\begin{aligned}
&(p \wedge q) \Rightarrow ((p \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)) && \text{Angabe} \\
&\neg(p \wedge q) \vee ((p \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)) && \text{Auflösung der Implikation} \\
&\neg(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge \neg r) && \text{Auflösung der Klammern} \\
&(\neg p \vee \neg q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge \neg r) && \text{de Morgan} \\
&(a \vee (p \wedge r)) \vee (q \wedge \neg r) && \text{Substitution } a = (\neg p \vee \neg q) \\
&((a \vee p) \wedge (a \vee r)) \vee (q \wedge \neg r) && \text{Distributivgesetz} \\
&((\neg p \vee \neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)) \vee (q \wedge \neg r) && \text{Resubstitution} \\
&(1 \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)) \vee (q \wedge \neg r) && p \vee \neg p = 1 \\
&(\neg p \vee \neg q \vee r) \vee (q \wedge \neg r) && 1 \wedge x = x \\
&b \vee (q \wedge \neg r) && \text{Substitution } b = (\neg p \vee \neg q \vee r) \\
&(b \vee q) \wedge (b \vee \neg r) && \text{Distributivgesetz} \\
&(\neg p \vee \neg q \vee r \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r \vee \neg r) && \text{Resubstitution} \\
&1 \wedge 1 && q \vee \neg q = 1, r \vee \neg r = 1 \\
&1
\end{aligned}
$$

(b) $\underbrace{((p \wedge r) \vee (q \wedge \neg r))}_{\text{muss 1 sein}} \Rightarrow \underbrace{(p \wedge q)}_{\text{muss 0 sein}}$

Angenommen man setzt $p = 1, q = 0, r = 1$ in den Ausdruck ein, so bekommt man $((1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0)) \Rightarrow (1 \wedge 0)$, welches $(1 \vee 0) \Rightarrow 0$ entspricht, dass man weiter zu $1 \Rightarrow 0$ vereinfachen kann, was dem Wahrheitswert 0 (false) entspricht und damit für diese Belegung nicht stimmt. Somit kann der Ausdruck nicht für alle Belegungen von p, q und r gelten.