Marek Kubica, kubica@in.tum.de

Punkteverteilung:

1	2	3	4	Σ

Aufgabe (1)

(a) $x \equiv n^2, y \equiv$ gerade natürliche Zahlen

$$
\begin{aligned}
1 &\to 2\\
4 &\to 4\\
9 &\to 6\\
16 &\to 8\\
25 &\to 10\\
36 &\to 12\\
49 &\to 14
\end{aligned}
$$

Abbildung von x nach y: $y = 2\sqrt{x}$, Abbildung von y nach x: $x = (\frac{y}{2})^2$.

(b) Gesucht ist eine injektive Abbildung von $V = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ in $\mathbb{N}$. Da $a, b \in \mathbb{Q}$ können sie als $a = \frac{c}{d} c \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N}$ und $b = \frac{e}{f} e \in \mathbb{Z}, f \in \mathbb{N}$ dargestellt werden. Wichtig ist, dass maximal vereinfachte Brüche verwendet werden. $a = 0$ wird durch $\frac{c}{d} = \frac{2}{2}$ dargestellt, $b = 0$ analog dazu durch $\frac{e}{f} = \frac{3}{3}$. Nun müssen alle Zahlen auf $\mathbb{N}$ abgebildet werden, also werden positive Zahlen auf ihr doppeltes Abgebildet und negative Zahlen auf das doppelte ihres Betrages, so dass eine Bijektion von $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ aufgestellt wird. Dadurch sind $c, d, e, f \in \mathbb{N}$. Man kann nun die auf 4-Tupel erweiterte Cantorsche Paarungsfunktion π^4 verwenden um dem Tupel von natürlichen Zahlen bijektiv eine eine Zahl $\in \mathbb{N}$ zuzuordnen. Damit kann nun jeder Kombination von a und b eine Zahl aus $\mathbb{N}$ zugeordnet werden (bijektiv), woraus dann auch folgt dass es injektiv ist.

Es gilt $|V| = |\mathbb{Q}|$ da im obrigen bewiesen wurde, dass $|V| = |\mathbb{N}|$ (bijektive Zuordnung also gleich mächtig). Durch eine weitere Cantorsche Diagonalisierung kann man ebenso zeigen, dass $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ und somit gilt transitiv auch, dass $|V| = |\mathbb{N}|$.

Aufgabe (2)

(a)

$$\frac{}{F \vdash true}$$

$$\frac{}{F \vdash F} \quad \text{Annahmeregel}$$

$$\frac{}{\vdash F \Rightarrow F} \quad \text{Implikationseinführung}$$

Ja, es ist gezeigt dass $F \Rightarrow F$ eine Tautologie ist, weil $\vdash F \Rightarrow F$ eine Tautologie ist.

(b) Es gelten $F \vdash \neg(\neg F)$ sowie $\neg(\neg F) \vdash F$, das bedeutet dass $F \Leftrightarrow \neg(\neg F)$ und $\neg(\neg F) \Leftrightarrow F$ gelten, man also F durch $\neg(\neg F)$ ersetzen kann und umgekehrt. Da $F \equiv F$ gilt und die Inferenzen besagen, dass man ersetzen kann, muss also auch $F \equiv \neg(\neg F)$ gelten.

Aufgabe (3)

(a) $A_1 \vdash F_1$ ergäbe sich im ersten Schritt der Herleitung. Wenn $F_1 \in A_1$, dann gilt die Annahmeregel, welches eine Basisregel ist.

(b) Ja, das gilt für alle Herleitungen, da es keine Inferenzregel gibt, die aus der Annahmenmenge Annahmen entfernt, somit ist A_n für alle i in A_i enthalten.

Aufgabe (4)

$F = \exists x \forall y \exists z(\neg(z = x) \wedge \neg(z = y) \wedge P(a, y, z))$

(a) Die Formel besitzt drei verschiedene Gültigkeitsbereiche, dies kann man am einfachsten zeigen indem man die Funktion in Teile zerlegt:

$F \equiv F_0 \equiv \exists x F_1$

$F_1 \equiv \forall y F_2$

$F_2 \equiv \exists z F_3$

$F_3 \equiv (\neg(z = x) \wedge \neg(z = y) \wedge P(a, y, z))$

Somit ist x überall in F_1 gültig, y ist in F_2 gültig und z in F_3. Keine dr Variablen wird überdeckt, somit gelten die Variablen ab ihrer Quatifizierung bis zum Ende der Formel.

(b) $S = (U, I)$

$U_S = \{0, 1, 2\}$

$I(a) = 1$

$I(P) = \{(1, 0, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 0)\}$