4. Reihen

Marek Kubica, Antonia Schmalstieg

TU München

30. März 2011

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition

Man ordnet einer Folge komplexer Zahlen (a_n) die Folge (s_n) mit

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

zu. Die einzelnen Summanden a_i nennt man i-te Partialsummen.

4.1 Konvergenz von Reihen

Konvergenz

Konvergiert die Folge, so gilt

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots$$

Divergiert die Folge, so gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \pm\infty$$

Beispiele

Teleskopreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

Harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

da ihre Partialsummen H_n sind, die unbeschränkt wachsen.

Beispiele

Geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$

für $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$, da $z^n \to 0$ $(n \to \infty)$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \infty$$

für $q \geq 1$.

Einfache Konvergenzresultate

- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert $\Rightarrow a_k \to 0$ $(k \to \infty)$
- Für nichtnegative Glieder:

$$\sum_{k}^{\infty} a_k \text{ konvergiert } \Leftrightarrow (s_n) \text{ beschränkt}$$

4.2 Vergleichkriterien

Majorantenkriterium

Idee: Reihe auf bekannte Reihen zurückführen, um Konvergenz oder Divergenz festzustellen
Es seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen bei denen für alle Glieder

$$|a_k| \leq b_k$$

gilt. Dann heißt $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *Majorante* von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Es gilt:

- $|\sum_{k=1}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$
- Divergiert (a_k), so divergiert auch (b_k).

Quotientenkriterium

Idee: Vergleich mit Geometrischer Reihe.
Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k \neq 0$ für fast alle k.
Falls es den Grenzwert

$$q = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$$

gibt, so gilt für $q < 1$ Konvergenz; für $q > 1$ Divergenz; für $q = 1$ kann keine Aussage getroffen werden.

Wurzelkriterium

Idee: Vergleich mit Geometrischer Reihe.
Für eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ definieren wir die Zahl

$$\rho = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

Die Reihe konvergiert, falls $\rho < 1$, divergiert falls $\rho > 1$, für $\rho = 1$ kann keine Aussage getroffen werden.

4.3 Alternierende Reihen

Leibnitzkriterium

(a_n) sei eine monoton fallende Nullfolge, dann konvergiert die dazugehörige alternierende Reihe

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

und s_n approximiert s bis auf einen Fehler gleich des Betrags des letzten weggelassenen Summanden.

4.5 Umordnungen

Meiste Operationen unkritisch

Addition

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_n + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

☹

Umordnungen von Reihengliedern im Allgemeinen nicht erlaubt

Cauchy-Produkt

Zum Zusammenfügen von Reihen über Multiplikation

$$c_m = \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k}$$