Punkteverteilung:

1	2	3	Σ

Aufgabe (1)

(a) Da es für jede Zahl $\in [n]$ nur drei Möglichkeiten gibt: entweder sie kommt in A_1 vor oder sie kommt in A_2 vor (sie kann nicht sowohl in A_1 als auch in A_2 vorkommen, da die Mengen laut Angabe disjunkt sein sollen) oder sie kommt in keine von beiden vor. Da es also n Zahlen gibt, führt das zu 3^n Lösungen.

(b) Wenn man das maximale mögliche Tupel bildet ist dies $(5,5,5,5,5)$ und dessen Summe ist 25, also $25 - 21 = 4$ zu viel. Somit muss man die Möglichkeiten bilden, von diesem Tupel 4 abzuziehen. Somit sind die Möglichkeiten:

a) $(5,5,5,5,1)$ als ungeordete Menge was $\frac{5!}{4!} = 5$ Möglichkeiten für geordnete Tupel entspricht.

b) $(5,5,5,4,2)$ als ungeordete Menge was $\frac{5!}{3!} = 20$ Möglichkeiten für geordnete Tupel entspricht.

c) $(5,5,5,3,3)$ als ungeordete Menge was $\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ Möglichkeiten für geordnete Tupel entspricht

d) $(5,5,4,4,3)$ als ungeordete Menge was $\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$ Möglichkeiten für geordnete Tupel entspricht

e) $(5,4,4,4,4)$ als ungeordete Menge was $\frac{5!}{4!} = 5$ Möglichkeiten für geordnete Tupel entspricht

Die Summe ist $5 + 20 + 10 + 30 + 5 = 70$, was genau der Anzahl der Lösungen für die Gleichung entspricht.

Aufgabe (2)

Es sollen n Elemente in $n-2$ Mengen verteilt werden. Dies entspricht den Stirling-Zahlen zweiter Art $S_{n,k}$ aber da n und k nicht unabhängig sind, lässt sich eine Beobachtung anstellen, dass die Anzahl der Mengen auch nichtrekursiv zu bestimmen ist.

Es gibt für $n = n$ und $k = n - 2$ nur zwei mögliche Konfigurationen:

- Es gibt eine Partition mit drei Elementen, die anderen Partitionen müssen einelementig sein. Die Reihenfolge ist beliebig, also ist für die dreielementige Menge die Anzahl der Möglichkeiten $\binom{n}{3}$ (3 Elemente aus n ziehen ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge). Die restlichen $n - 3$ Zahlen sind beliebig.

- Es gibt zwei Partitionen mit je zwei Elementen, die anderen Partitionen müssen einelementig sein. Analog zu der ersten Möglichkeit gibt es also für die erste zweielementige Menge $\binom{n}{2}$ Möglichkeiten, für die zweite nur noch $\binom{n-2}{2}$ Möglichkeiten. Die restlichen Elemente sind egal, da daren reihenfolge keine Rolle spielt. Da aber in dem Fall $\{1,2\},\{3,4\},\{5\},\{6\}$ und $\{3,4\},\{1,2\},\{5\},\{6\}$ als unterschiedliche Möglichkeiten gewertet werden würden, muss noch mit $\frac{1}{2}$ multipliziert werden damit die Reihenfolge der beiden zweielementigen Mengen keine Rolle spielt.

Somit ist nun

$$
\begin{aligned}
S_{n,n-2} &= \binom{n}{3} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{2} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{n!}{3! \cdot (3-n)!} + \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} \cdot \frac{(n-1)!}{2! \cdot (n-2-2)!} \cdot \frac{1}{2} && \text{Binomialkoeffizient aufgelöst} \\
&= \frac{n!}{3! \cdot (3-n)!} + \frac{n!}{2!} \cdot \frac{1}{2! \cdot (n-4)!} \cdot \frac{1}{2} && (n-2)! \text{ gekürzt} \\
&= \frac{n!}{6 \cdot (3-n)!} + \frac{1}{8 \cdot (n-4)!} \\
&= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{8} && \text{Fakultäten gekürzt} \\
&= \frac{4 \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{24} + \frac{3 \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{24} \\
&= \frac{4 \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) + 3 \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{24} \\
&= \frac{1}{24} \cdot 4 \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) + 3 \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \\
&= \frac{1}{24} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)\,(4 + 3 \cdot (n-3)) \\
&= \frac{1}{24} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)\,(4 + 3n - 9) \\
&= \frac{1}{24} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)(3n-5) && \square
\end{aligned}
$$

Aufgabe (3)

(a) Da T_k eine k-elementige Klasse ist bedeutet dies, dass es nur noch $n-k$ Elemente gibt, die nicht in dieser Klasse sind und die noch in (beliebige) Partitionen eingeteilt werden können, also B_{n-k}. Wenn nun ein Element in der Menge hinzugefügt wird gäbe es B_{n+1-k} freie Elemente über die Partitionen gebildet werden können. Da aber das soeben hinzugefügte Element in die Klasse T_k aufgenommen wird, existieren wieder nur $n-k$ freie Elemente $n+1$ elementigen Menge die in Partitionen eingeteilt werden könnnen, somit ist die Menge der möglichen Partitionen weiterhin B_{n-k}. Man könnte auch argumentieren dass aus der n-elementigen Menge die $n+1$-elementige Menge wird und aus T_k T_{k+1} und die Formel dann $B_{(n+1)-(k+1)} = B_{n+1-k-1} = B_{n-k}$ wird.

(b) Um die Anzahl der Partitionen einer $n+1$-elementigen Menge zu bilden, muss man an zu jeder Partition der Länge 0 bis n ein Element hinzufügen. Um das Element hinzuzufügen gibt es für jede Menge der Länge k $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten (da die Reihenfolge egal ist). Diese Möglichkeiten werden von $k=0$ (also die Partitionen der n elementigen Menge) bis $k=n$ (also die Anzahl der Partitionen der leeren Menge) aufsummiert, was sicherstellt dass alle Partitionen der Länge B_{n-k} gezählt werden werden.

Somit gilt die Formel $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}$