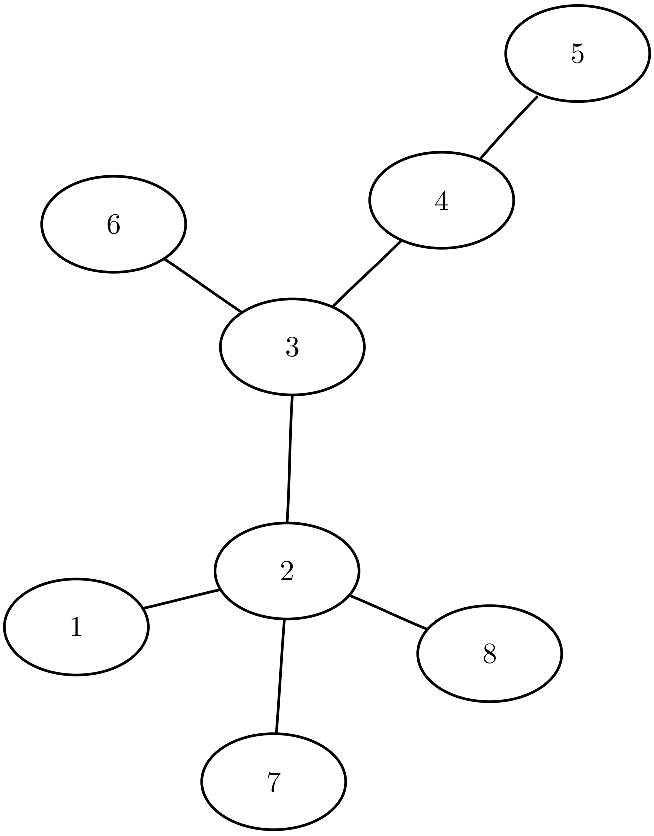
Punkteverteilung:

1	2	3	4	Σ

Aufgabe (1)

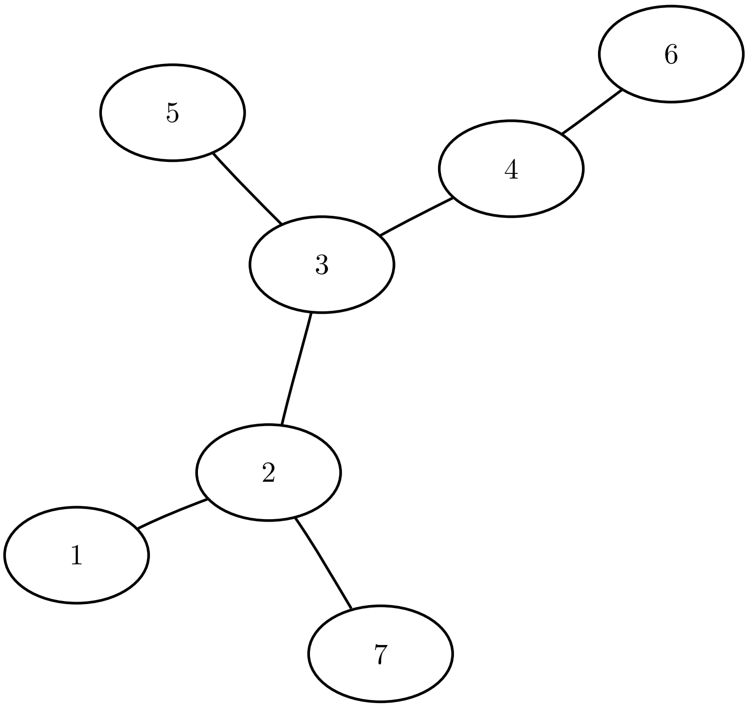


(a) Der Graph B hat den Prüfer-Code 2, 4, 3, 3, 2, 2 der zustande kommt, wenn man den kleinsten Knoten vom Grad 1 streicht und den anderen, übrig gebliebenen Knoten in den Prüfer-Code einfügt und dann so lange wiederholt, bis nur noch zwei Knoten übrig sind.

(b) Um den Prüfer-Code 2, 3, 4, 3, 2 in einen Graphen zurückzuführen kann man den Algorithmus aus Steger, Diskrete Strukturen, Band 1, Kapitel 2.2 verwenden. Dazu macht man sich bewusst, dass die Knotenmenge die Knoten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 enthält (Länge des Prüfer-Codes + 2). Nun führt man die Schleifenschritte durch:

a) $i = 1$: $t_1 = 2$ $s_1 = 1$ $S = \{1\} \rightarrow \{1, 2\}$
b) $i = 2$: $t_2 = 3$ $s_2 = 5$ $S = \{1, 5\} \rightarrow \{3, 5\}$
c) $i = 3$: $t_3 = 4$ $s_3 = 6$ $S = \{1, 5, 6\} \rightarrow \{4, 6\}$
d) $i = 4$: $t_4 = 3$ $s_4 = 4$ $S = \{1, 4, 5, 6\} \rightarrow \{3, 4\}$
e) $i = 5$: $t_5 = 2$ $s_5 = 5$ $S = \{1, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{2, 5\}$
f) Rest: $\{2, 7\}$

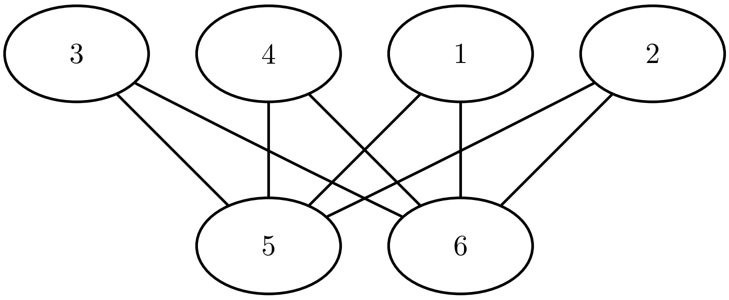
Somit wären das die Kanten des Graphen. Dieser Graph kann nun konstruiert werden:



(c) Man erkennt dass der Prüfer-Code einen Pfad beschreibt daran, dass jeder Knoten nur ein mal im Code vorkommt. Das liegt daran, dass ein Pfad nur Knoten vom Grad 1 (Endpunkte, zwei Stück) oder Knoten vom Grad 2 enthält (Mittelstücke, Länge des Pfades - 2 Stück). Die Knoten vom Grad 1 werden im Prüfer-Code gar nicht aufgenommen, da bei der Konstruktion des Prüfer-Codes prinzipiell nur die Knoten aufgenommen werden, an denen noch weitere Knoten hängen. Die Knoten vom Grad 2 kommen nur ein mal vor, denn nachdem einer der an ihnen hängenden Knoten entfernt wurde und sie im Prüfer-Code aufgezeichnet wurden, sie nur noch vom Grad 1 sind und somit nicht noch einmal in den Code aufgenommen werden.

Aufgabe (2)

(a) Fast-4-regulär, das bedeutet, dass 4 Knoten den Grad 2 haben, der Rest den Grad 4 hat. In einem Graphen G mit 6 Knoten bedeutet das, dass es 4 Knoten vom Grad 2 gibt und 2 Knoten vom Grad vier. Es gibt für diesen Graphen tatsächlich nur eine Möglichkeit:

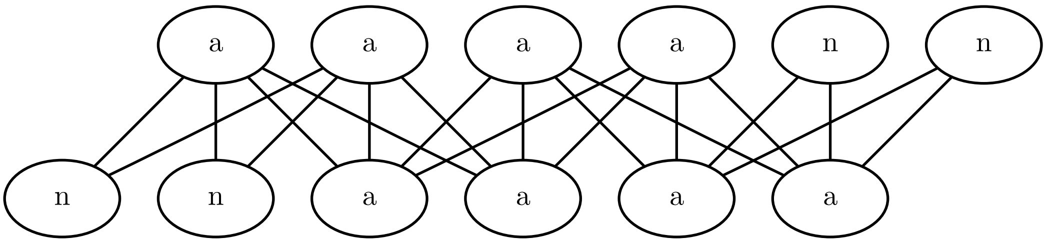


Die erste, obere Partition besteht aus vier Knoten vom Grad 2, die logischerweise mit 2 Knoten aus der unteren Partition verbunden sein müssen, somit ist jeder Knoten der oberen Partition mit den Knoten aus der unteren Partition verbunden. Gleichzeitig muss es zwei Knoten vom Grad vier geben. In diesem Graphen sind das die Knoten 5 und 6, die, da sie beide Grad 4 haben müssen, somit zwangsweise mit jedem Knoten aus der oberen Menge verbunden sind. Es gibt keine anderen Möglichkeiten die Bipartition anzulegen, da die Knoten vom Grad 4 alleine in einer Partition sein müssen, damit sie vier Knoten zum verbinden in der anderen Partition haben.

Dieser Graph ist planar (leider nicht in der Darstellung von `dot`, da muss man sich die Kanten die innen verlaufen außenrum vorstellen, was auf jeden Fall möglich ist) da nach dem Satz von Kuratowski der vorliegende $K_{4,2}$ weder eine Unterteilung des $K_{3,3}$ als Teilgraphen enthält (da eine Partition nur 2 Knoten enthält und somit so ein Teilgraph nicht möglich ist) noch eine Unterteilung des K_5 enthält (da der Graph bipartit ist und somit keinen vollständigen Graphen $\geq K_5$ enthalten kann).

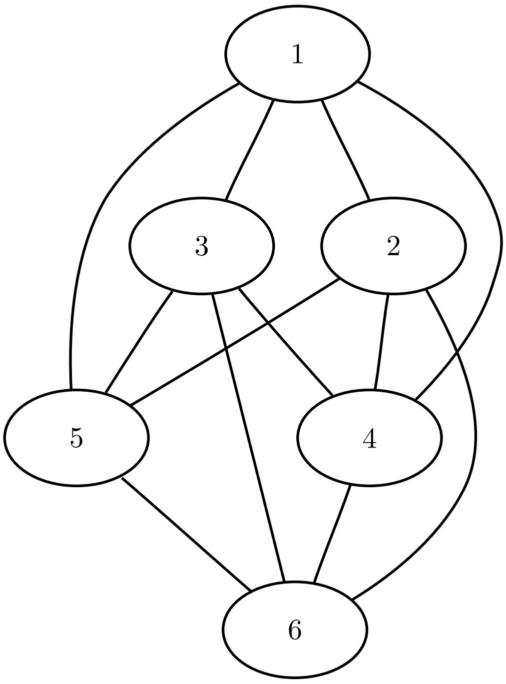
(b) Induktionsbasis ist $n_0 = 1$, da bewiesen werden muss, dass die Aussage für alle Graphen mit $n \geq 1$ gilt. Da $n_0 = 1$ ist die Mächtigkeit der Menge A $|A| = 2 \cdot n_0 = 2 = |B|$, somit enthalten A und B jeweils zwei Knoten. Der Graph hat also 4 Knoten, davon 4 vom Grad zwei und 0 vom Grad 4. Solch ein Graph ist trivial herzustellen, siehe Abbildung in Aufgabe 3.2. Natürlich kann man solch einen Graphen auch planar darstellen.

Bei dem Induktionsschritt $n+1$ ist $|A| = 2 \cdot (n+1) = |B|$. Verglichen zum Fall von n kommen nun auf jeder Seite zwei weitere Knoten hinzu, insgesamt 4. Diese vier neuen Knoten werden so verbunden, dass sie den Grad 2 bekommen und die vorherigen Knoten vom Grad 2 werden zu Knoten von Grad 4. Die Zeichnung demonstriert das für den Graphen G_{n+1} wobei die alten Knoten mit a bezeichnet sind und die neu hinzugefügten mit n.



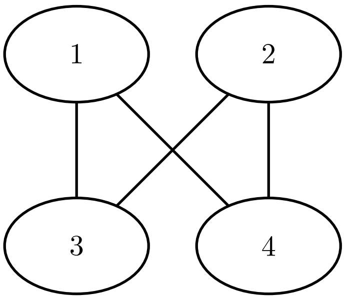
Aufgabe (3)

(a) Ein Graph mit $n = 6$ Knoten, $(n-2) = 4$-regulär:



(b) Die chromatische Zahl $\chi = \frac{n}{2}$ bedeutet, dass maximal $\frac{n}{2}$ Farben nötig sind, um einen Graphen mit n Knoten zu färben. Gleichzeitig bedeutet es aber auch, dass die Knoten des Graphen in $\frac{n}{2}$ Partititionen eingeteilt werden können. Um zu zeigen, dass diese Bedingung für alle geraden $n \in \mathbb{N}$ zutrifft, wird im folgenden gezeigt, wie solch ein Graph konstruiert werden kann.

Der Basisfall ist der Graph $n = 4$, der in $\frac{4}{2} = 2$ Partitionen geteilt wird:



Man sieht, dass dieser Graph bipartit ist und alle Knoten den Grad $(n-2) = 2$ haben. Nun wird der Schritt von n zu $n+2$ gemacht (da n gerade sein soll, müssen immer zwei neue Knoten hinzugefügt werden). Dazu wird der Graph für n um die zwei neu hinzukommenden Knoten erweitert, die in eine eigene Partition geteilt werden. Diese haben erstmal den Grad null, müssen also noch mit den allen n Knoten des alten Graphen verbunden werden, dadurch haben sie Grad n (was der Vorraussetzung entspricht, denn $((n+2)-2) = n$. Durch die 2 neuen Kanten pro Knoten des alten Graphen steigt auch deren Kantenanzahl auf n, somit haben alle $n+2$ Knoten des neuen, erweiterten Graphen Grad n und erfüllen die Bedingung dass der Graph regulär ist und der Grad der Kanten gleich der Anzahl der Knoten minus 2 ist. Zusätzlich ist auch die Anzahl der Partitionen immer gleich $\frac{\text{Anzahl der Knoten}}{2}$ da für jeden Schritt, der zwei Knoten dem Graphen hinzufügt, eine neue Partition entsteht. Dies bedeutet auch, dass auch allgemein $\chi = \frac{n}{2}$ gilt, da dieser neue Graph auch wieder um zwei weitere Knoten erweitert werden kann unter Beibehaltung der geforderten Eigenschaften.

Aufgabe (4)

Die Gradfolge des resultierende Stammbaumes ist $1, (2 \cdot n - 2) \cdot 2, 1$. Das erklärt sich darin, wie die Tiefensuche funktioniert: man geht von einem Startpunkt aus und geht von dort zu dem Knoten mit der kleinsten Zahl. Somit ist der Grad des Startpunktes 1. Nun läuft der Algorithmus von Knoten zu dem jeweils kleinsten nächsten möglichen Knoten, wobei der Grad jedes Knoten auf diesem Weg 2 beträgt, da der Knoten einmal betreten und einmal verlassen wird. Auf diese Weise kann man im bipartiten Graphen jeden Knoten der Reihe nach betreten indem man von einer zur anderen Partition läuft ohne das Vorgehen jemals zu ändern (das Verhalten wird nur bei Sackgassen geändert und bei dem Verfahren gibt es nur am Ende, beim letzten Knoten eine Sackgasse). Dadurch wird jeder Knoten genau einmal besucht und man kommt schließlich zu einem Knoten (der in der jeweils anderen Partition liegt zu der von der man gestartet ist). Da man diesen Knoten nur betritt, aber nicht verlässt, hat er Grad 1. Weitere Unterscheidungen sind nicht mehr nötig, da an diesem Punkt alle Knoten besucht worden sind und der Spannbaum erstellt werden konnte.

Somit ist die Länge des Spannbaumes des Graphen $K_{n,n} = 2n$, von denen alle Knoten den Grad 2 haben, bis auf den ersten und letzten.