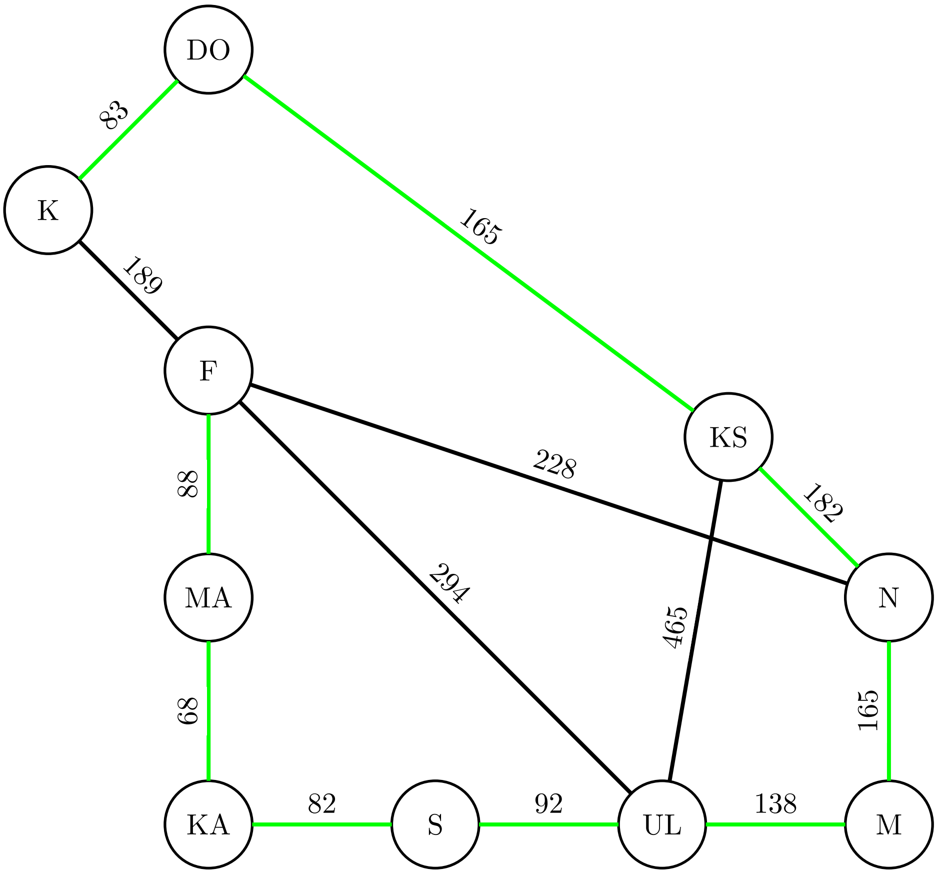
Punkteverteilung:

1	2	3	4	5	Σ

Aufgabe (1)

(a) Mit dem Algorithmus von Kruskal ist es sehr einfach aus dem Graphen von Tutoraufgabe 2 des Übungsblattes 13 einen minimalen Spannbaum zu erstellen. Dabei nimmt man zuerst den ursprünglichen Graphen her (hier in schwarz gezeichnet), also einen gewichteten, zusammenhängenden Graphen. Dann wählt man die Kante mit dem kleinsten Gewicht aus und markiert sie als “dem Spannbaum angehörig” (hier in grün dargestellt). Dies wäre die Kante zwischen Karlsruhe und Mannheim, mit dem Wert 68. Danach sucht man nach der nächstkleinere Kante. Diese muss nicht zu den bereits gefundenen Spannbaum verbunden sein, sie darf jedoch nicht dazu führen, dass der Spannbaum einen Kreis aufweist – in diesem Fall nimmt man solange die nächstgrößere Kante bis entweder alle Kanten versucht worden sind (dann ist man fertig) oder eine passende Kante hinzugefügt wird. Im Fall dass zwei Kanten das selbe Gewicht haben und genausogut in den Spannbaum passen würden, nimmt man zufällig erst die eine, dann die andere auf, so wie im vorliegenden Graphen die Kante zwischen Kassel und Dortmund und zwischen Nürnberg und München.

Der fertige Graph sieht nun folgendermaßen aus:



(b) a) F = {Ulm, Stuttgart, Karlsruhe, Mannheim, Frankfurt, Nürnberg, Kassel, Dortmund, Köln}.

d[Ulm] = 138, d[Stuttgart] = ∞, d[Karlsruhe] = ∞, d[Mannheim] = ∞, d[Frankfurt] = ∞, d[Nürnberg] = 165, d[Kassel] = ∞, d[Dortmund] = ∞, d[Köln] = ∞, d[München] = 0.
p[Ulm] = München, p[Nürnberg] = München

b) u = Ulm
F = {Stuttgart, Karlsruhe, Mannheim, Frankfurt, Nürnberg, Kassel, Dortmund, Köln}.
Updates:
d[Kassel] = 603, d[Stuttgart] = 230, d[Frankfurt] = 432
p[Kassel] = Ulm, p[Stuttgart] = Ulm, p[Frankfurt] = Ulm

c) u = Nürnberg
F = {Stuttgart, Karlsruhe, Mannheim, Frankfurt, Kassel, Dortmund, Köln}.
Updates:
d[Kassel] = 347, d[Frankfurt] = 393
p[Kassel] = Nürnberg, p[Frankfurt] = Nürnberg

d) u = Stuttgart
F = {Karlsruhe, Mannheim, Frankfurt, Kassel, Dortmund, Köln}.
Updates:
d[Karlsruhe] = 312
p[Karlsruhe] = Stuttgart

e) u = Karlsruhe
F = {Mannheim, Frankfurt, Kassel, Dortmund, Köln}.
Updates:
d[Mannheim] = 380
p[Mannheim] = Karlsruhe

f) u = Kassel
F = {Mannheim, Frankfurt, Dortmund, Köln}.
Updates:
d[Dortmund] = 512
p[Dortmund] = Karsruhe

g) u = Mannheim
F = {Frankfurt, Dortmund, Köln}.
Updates: keine neuen kürzeren Wege.

h) u = Frankfurt
F = {Dortmund, Köln}.
Updates: keine neuen kürzeren Wege.

i) u = Dortmund
F = {Köln}.
Updates:
d[Köln] = 595
d[Köln] = Dortmund

j) u = Köln
F = $\emptyset$
Updates: keine neuen kürzeren Wege.

Rücktraversierung von Köln aus mithilfe von p liefert (Köln, Dortmund, Kassel, Nürnberg, München) mit 595 km.

Aufgabe (2)

(a)
a) $19 - (\lfloor 19 \div 3 \rfloor \cdot 3) = 1 \Rightarrow x = 1$
b) Wenn man 3^n *mod* 5 mit kleinen Zahlen berechnet kommt man zum Schluss, dass die Ergebnisse zyklisch sind, in der Reihenfolge (1, 3, 4, 2). Somit muss man nur herausfinden, auf welches Element des Zyklus der Exponent 30 fällt. Dazu kann man trivial, wie in obiger Aufgabe 30 *mod* 4 berechnen, dessen Ergebnis 2 ist. Somit fällt das Ergebnis auf die 3. Stelle des Zyklus (da der Zyklus mit 0 anfängt). Dies bedeutet also, dass 3^{30} *mod* $5 = 4$. Eine Probe in Maple, `3**30 mod 5;` bestätigt dieses Ergebnis.
c) $-20 - (\lfloor -20 \div 7 \rfloor \cdot 7) = -20 - (-21) = 1$

(b) Man kann sich zur Hilfe nehmen, dass $(a+b)\ mod\ m = [(a\ mod\ m)+(b\ mod\ m)]\ mod\ m$ gilt. Somit kann man erst jeden einzelnen Summanden Modulo 6 rechnen und dann erst das gesamte Ergebnis Modulo 6.

10^n *mod* 6 hat einen sehr kurzen Zyklus, nämlich (4), somit ist auch 10^{17} *mod* $6 = 4$. Bei 5^n *mod* 6 ist der Zyklus (1, 5); der Index entspricht dem Exponenten modulo Zykluslänge, 23 *mod* $2 = 1$. Somit ist der Wert von 5^{23} *mod* $6 = 5$. Bei 30^n *mod* 6 ist der Zyklus noch einfacher, er enthält nur (0), somit ist es klar, dass das Ergebnis von 30^100 *mod* $6 = 0$ ist und dieser Summand gar nicht in die Berechnung eingeht. Nun rechnet man mit den simplen Zahlen weiter: $(4 + 5)$ *mod* $6 = 3$, somit ist das Ergebnis 3.

Wenn man das Ergebnis nachprüfen will, kann man sich von Maple helfen lassen: `(10 &^ 17 + 5 &^ 23 - 30 &^ 100) mod 6;`

(c) Analog zu der zweiten Aufgabe bei 2.1 kann man auch hier einen Zyklus bei 2^n *mod* 14 beobachten, nämlich (2, 4, 8). Wenn man nun 7346790100 *mod* 14 rechnet bekommt man als Ergebnis 1, was man auf den Index 0, also den Wert 2 des Zyklus übersetzen kann. Somit ist das Ergebnis des Terms 2. Eine Prüfung mit Maple, `2 &^ 7346790100 mod 14;` bestätigt das Ergebnis.

Aufgabe (3)

Eine Komposition ist immer assoziativ, somit ist diese Eigenschaft gegeben, zum Beweis der anderen Eigenschaften einer Gruppe kann man die folgende Tabelle mit der Komposition der einzelnen Funktionen betrachten:

$\circ$	x	$\frac{1}{x}$	$1-x$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x-1}{x}$
x	x	$\frac{1}{x}$	$1-x$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x-1}{x}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{x}{x-1}$	$1-x$	$1-x$
$1-x$	$1-x$	$\frac{1}{1-x}$	x	$\frac{1}{x}$	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{x}{x-1}$
$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{1-x}$	$1-x$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x-1}{x}$	x	x
$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{1}{1-x}$	$1-x$	x	$\frac{1}{x}$
$\frac{x-1}{x}$	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{x}$	$1-x$	x	$1-x$

Es fällt auf, dass x sowohl das links- als auch das rechtsinverse Element ist. Zusätzlich kommt in jeder Zeile das neutrale Element x mindestens ein Mal vor, was bedeutet dass es für jede Komposition von f ein g gibt, dass dessen inverses Element ist. Was ebenfalls auffällt ist, dass die Tabelle abgeschlossen ist, d.h das Ergebnis jeder Komposition ist auch wieder Teil der Trägermenge.

Damit wäre die Trägermenge und die Komposition assoziativ ✓, abgeschlossen ✓, hätte ein neutrales Element ✓ und jedes Element hätte ein inverses ✓. Somit ist die Trägermenge bezüglich der Komposition eine Gruppe. $\square$

Aufgabe (4)

(a)

(b) Die Ordnung bedeutet, dass ein Element $ord(x)$ mal verknüpft werden muss, um das neutrale Element zu ergeben.

$$\begin{aligned}
(a \circ b)^4 &= e \\
(a \circ b)^2 (b \circ a)^2 &= e \\
(a^2 \circ ab \circ ab \circ b^2)(a^2 \circ ab \circ ab \circ b^2) &= e \\
(a \circ b \circ a \circ b)(a \circ b \circ a \circ b) &= e \\
(a^2 \circ b^2)(a^2 \circ b^2) &= e \\
e &= e
\end{aligned}$$

(c) Ein Beispiel wäre $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$, wo etwa das Element 1 eine unendliche Ordnung hat.

Aufgabe (5)

(a) Die Untergruppen sind $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14\}$ (gesamte Gruppe, gilt auch als Untergruppe), $\{0,3,6,9,12\}$, $\{0,5,10\}$ und $\{0\}$ die mit der Mächtigkeit 15, 5, 3 und 1 (also Teiler der Mächtigkeit der Gruppe) alle möglichen Untergruppen abdecken.

Alle betrachteten Untergruppen sind zyklisch, da $\langle \mathbb{Z}_{15}, +_{15} \rangle$ eine endliche, zyklische Gruppe ist und jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe auch wieder zyklisch ist.

(b) Die Untergruppen kann man über die Gleichung $S = \{n \cdot z | n \in \mathbb{N}, z \in Z\}$ aufstellen – d.h. man nimmt alle Zahlen aus $\mathbb{Z}$ und multipliziert sie mit einem Faktor n so dass Untergruppen wie $\{1, 2, 3, 4, ...\}$ (bei $n = 1$) oder $\{2, 4, 6, 8, ...\}$ (bei $n = 2$) entstehen.

Alle so konstruierten Untergruppen sind zyklisch, da $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ eine unendliche, zyklische Gruppe ist und jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe auch wieder zyklisch ist.