Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 15
Computergraphik & Visualisierung
Prof. Dr. Rüdiger Westermann
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2007/08
Lösungsblatt 1
1. November 2007

Diskrete Strukturen

Vorbemerkung: Hausaufgaben sollen grundsätzlich eine Lernkontrolle darstellen für den in vorausgegangenen Tutoraufgaben oder selbständig bereits durchgearbeiteten Stoff. Hausaufgaben haben insofern auch Wiederholungscharakter. Auf dem ersten Übungsblatt allerdings greifen die Hausausgaben naturgemäß auf Stoff zurück, der Schulstoff ist oder in Vorkursen erworben wird. Der verbleibende Stoff sollte in anderen Quellen nachgeschlagen werden. Beachten Sie auch, dass einige Bezeichnungen indirekt durch den Kontext definiert werden. Einfache mengentheoretische Bezeichnungen werden ebenfalls vorläufig als bekannt vorausgesetzt und in nachfolgenden Blättern noch einmal wiederholt.

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Die natürliche Zählung beginnt bei 1 und kann beliebig fortgesetzt werden. Sie durchläuft die unendliche Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen. Wir verwenden die Bezeichnungen $\mathbb{N}_0$ für die um die Zahl 0 erweiterte Menge $\mathbb{N}$, und $\mathbb{Z}$ für die $\mathbb{N}_0$ umfassende Menge der ganzen Zahlen. Wir setzen die $\mathbb{Z}$ umfassende Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen und deren Verknüpfungen (Addition und Multiplikation) als bekannt voraus, aus der Schule oder eigener Recherche.

1. Ist 1 ein Teiler von 5? Ist 1 eine Primzahl? Was ist der größte gemeinsame Teiler von 1001 und 1002 ($= ggT(1001, 1002)$)? Welchen Wert besitzt $ggT(120, 306)$?

2. Jede positive rationale Zahl kann bekanntlich durch einen Bruch $\frac{a}{b}$ dargestellt werden, wobei a und b natürliche Zahlen bedeuten. a heißt Zähler und b heißt Nenner des Bruchs $\frac{a}{b}$.

   Geben Sie eine Regel an, die definiert, wann zwei Brüche die gleiche positive rationale Zahl darstellen! Welche Rolle kann dabei der ggT von Zähler und Nenner eines Bruchs spielen? Geben Sie eine Regel an zur eindeutigen Darstellung einer positiven rationalen Zahl als Bruch!

Lösungsvorschlag

Die im Folgenden gegebenen "Erläuterungen" dienen ausschließlich dem besseren Verständnis der Aufgaben. Sie sind nicht Teil der geforderten Antworten und werden entsprechend nicht bepunktet.

1. 1 ist ein Teiler von 5!

   Erläuterung: Einen Ausdruck der Form $x \cdot y$ nennt man Produkt. x und y sind die Operanden dieses Produkts. Setzt man für x und y konkrete Zahlen ein, z. B. $x = 1$ und $y = 5$, dann liefert die Multiplikation $1 \cdot 5$ den Wert des Produkts, nämlich

$1 \cdot 5 = 5$. 1 und 5 sind Faktoren oder Teiler des Produkts 5. Ganz allgemein sind Zahlen x und y Teiler der Zahl $z = x \cdot y$.
Definitionsgemäß heißt eine Zahl x ein Teiler einer Zahl z (oder z besitzt x als Teiler), falls es eine Zahl y gibt, so dass $z = x \cdot y$ gilt.

1 ist keine Primzahl!

Erläuterung: Zunächst hat eine Primzahl defnitionsgemäß die Eigenschaft, außer 1 und sich selbst keine anderen Teiler zu besitzen. Außerdem zählt man 1 definitionsgemäß nicht zu den Primzahlen.

Es gilt $ggT(1001, 1002) = 1$!

Erläuterung: Wir könnten natürlich zunächst die endliche Menge T_1 der Teiler von 1001 bestimmen, dann die Menge T_2 der Teiler von 1002 bestimmen, dann die Schnittmenge $T_1 \cap T_2$ bestimmen, dann das größte Element dieser Schnittmenge als Lösung angeben. Völlig korrekt!.
Andererseits ist dieser Lösungsweg sehr aufwendig. Wir gelangen schneller wie folgt zum Ziel:
Sei x der größte gemeinsame Teiler von 1001 und 1002. Dann gilt definitonsgemäß mindestens $x \cdot y_1 = 1001$ und $x \cdot y_2 = 1002$ für geeignete y_1, y_2. Daraus folgt aber

$$x(y_2 - y_1) = x \cdot y_2 - x \cdot y_1 = 1002 - 1001 = 1\,.$$

Damit ist x Teiler von 1, folglich $x = 1$.

Es gilt $ggT(120, 306) = 6$!

Erläuterung:

$$\begin{aligned} 120 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5\,, \\ 306 &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 17\,. \end{aligned}$$

Nun bestimmen wir die gemeinsame Vielfachheit der Faktoren von 120 und 306. Diese sind für 2 die Vielfachheit 1, für 3 die Vielfachheit 1, für 5 die Vielfachheit 0, und für 17 die Vielfachheit 0. Mithin erhalten wir das Ergebnis

$$ggT(120, 306) = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 17^0 = 6\,.$$

2. Offenbar gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{genau dann, wenn} \quad a \cdot d = b \cdot c\,.$$

Einen Bruch kann man durch gemeinsame Teiler von Zähler und Nenner kürzen, also auch durch deren ggT. Dies vereinfacht den Wertevergleich von Brüchen!

Seien nun $a = a' \cdot ggT(a, b)$, $b = b' \cdot ggT(a, b)$, $c = c' \cdot ggT(c, d)$, $d = d' \cdot ggT(c, d)$. Man beachte, dass nun a' und b', entsprechend c' und d', teilerfremd sind, d. h. keinen gemeinsamen Teiler besitzen.
Für vollständig gekürzte Brüche $\frac{a'}{b'}$ und $\frac{c'}{d'}$ gilt als Regel

$$\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'} \quad \text{genau dann, wenn} \quad a' = c' \text{ und } b' = d'\,.$$

Erläuterung: Aus $a' \cdot d' = b' \cdot c'$ folgt, dass jeder Primzahlfaktor p von a' auch Primzahlfaktor von $b' \cdot c'$ sein muß. Da aber a' und b' teilerfremd sind, muß p ein Faktor von c' sein. Daraus folgt, dass a' ein Teiler von c' ist. Analog folgt, dass c' ein Teiler von a' ist. Daraus folgt $a' = c'$. Analog folgt $b' = d'$.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Für rationale Zahlen ist eine Ordnungsbeziehung $<$ definiert. Überlegen Sie, wann $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ gilt für $a, b, c, d \in \mathbb{N}$!

1. Geben Sie für solche Brüche $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ einen Bruch $\frac{x}{y}$ an, so dass $\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{c}{d}$ gilt!
2. Zeigen Sie: Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist dicht.
   Hinweis: Eine (geordnete) Menge heißt dicht, wenn zwischen je zwei Elementen der Menge unendlich viele weitere Elemente der Menge liegen.

Lösungsvorschlag

1. Die Mitte m zwischen zwei Zahlen s und t (das arithmetische Mittel) läßt sich berechnen durch $m = \frac{s+t}{2}$. Wir rechnen

   $$m = \frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{2} = \frac{ad + bc}{2bd}.$$

   Wir setzen $x = ad + bc$ und $y = 2bd$.

2. Wie in Teilaufgabe 1 gezeigt wurde, gibt es zwischen je zwei rationalen Zahlen s und t mindestens eine weitere rationale Zahl m.

   Wenn es nun wahr wäre, dass zwischen s und t nur endlich viele rationale Zahlen existieren würden, dann müßte eine davon, sagen wir r_0, dem Minimum von s und t am nächsten sein. Laut Teilaufgabe 1 liegt aber das arithmetische Mittel von r_0 und dem Minimum von s und t näher an dem Minimum von s und t als es r_0 tut. Also ist es falsch, dass zwischen s und t nur endlich viele rationale Zahlen existieren.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Einst könnte sich die folgende Geschichte zugetragen haben:
Cantor stand vor einer Menge von Menschen und wurde gefragt, ob diese Menge gleich viele Männer wie Frauen enthalten würde. Cantor hatte wenig Lust, Männer einerseits sowie Frauen andererseits zu zählen. Er rief die Menschen dazu auf, jeweils irgendeinen andersgeschlechtlichen Partner an die Hand zu nehmen, und bat diejenigen hervorzutreten, die leer ausgegangen waren.
Wir lernen daraus, dass Mengen dann gleich groß sind, wenn sich deren Elemente mit einer gewissen Vorschrift paarweise zuordnen lassen.

Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{N}$ und die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ der Paare natürlicher Zahlen gleich groß sind, indem Sie eine Vorschrift angeben, wie man alle Elemente von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nacheinander durchlaufen kann!

Lösungsvorschlag

Zur Entwicklung der Vorschrift nehmen wir eine geometrische Vorstellung der Zahlenpaare (m, n) von natürlichen Zahlen zu Hilfe und fassen (m, n) als Punkte in einem x, y-Koordinatensystem auf. Manchmal werden solche Punkte auch als Gitterpunkte bezeichnet.
Es ist angebracht, sich einen „Durchlauf" besser als Nummerierung aller Gitterpunkte vorzustellen.

Dem Zahlenpaar bzw. dem Punkt $(1, 1)$ geben wir die Nummer 1.

Als nächstes zählen wir die Punkte $(1, 2)$ und $(2, 1)$, egal in welcher Reihenfolge. Geben wir z. B. dem Paar $(1, 2)$ die Nummer 2 und $(2, 1)$ die Nummer 3.

Die beiden zuletzt gezählten Paare (m, n) liegen offenbar auf der Geraden $m + n = 3$.

Als nächstes zählen wir die Paare (m, n), die auf der Geraden $m + n = 4$ liegen.

Und die allgemeine Vorschrift lautet, für alle $k = 2, 3, \ldots$ nacheinander alle Punkte der Geraden $m+n = k$ zu nummerieren. Innerhalb der Geraden könnte man z. B. die Punkte nach aufsteigender x-Komponente nummerieren.

Bemerkung: Das hier beschriebene Nummerierungsverfahren nennt man auch das erste Cantor'sche Diagonalverfahren.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wir nehmen an, dass es eine $\mathbb{Q}$ umfassende Menge $\mathbb{R}$ reeller Zahlen gibt, so dass es für alle positiven rationalen Zahlen $x \in \mathbb{Q}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ stets eindeutig eine positive Zahl $y \in \mathbb{R}$ mit $y^n = x$ gibt. y heißt dann die n-te Wurzel aus x, i. Z. $y = x^{\frac{1}{n}}$.

Zeigen Sie, dass $5^{\frac{1}{2}}$ (Quadratwurzel aus 5) keine rationale Zahl ist! Haben Sie damit schon gezeigt, dass $\mathbb{R}$ eine „größere" Menge ist als $\mathbb{Q}$?

Lösungsvorschlag

Es läßt sich mit den Rechenregeln der natürlichen Zahlen nicht vereinbaren, dass für eine rationale Zahl r gilt $r^2 = 5$.
Denn r ließe sich zunächst als Bruch $r = \frac{a}{b}$ schreiben, woraus folgen würde

$$a^2 = 5 \cdot b^2 \,.$$

Das geht aber nicht, weil die Anzahl der Faktoren 5 auf der linken Seite der Gleichung geradzahlig sein muß, während die Anzahl der Faktoren 5 auf der rechten Seite der Gleichung ungeradzahlig ist.

Wir haben lediglich bewiesen, dass es mindestens eine reelle Zahl gibt, nämlich $5^{\frac{1}{2}}$, die nicht in $\mathbb{Q}$ enthalten ist. Wenn aber zu $\mathbb{Q}$ ein einzelnes Element hinzugefügt wird, dann bleibt $\mathbb{Q}$ gleich groß im Sinne der in Aufgabe 3 nahegelegten Definition der Gleichheit von Mengen.

Erläuterung: Lassen wir mal jeder positiven Zahl r seinem Quadrat r^2 „die Hand reichen", d. h., wir betrachten eine Zuordnung der rationalen Zahlen zu ihrem Quadrat. Bezeichnen wir die Menge der positiven rationalen Zahlen mit $\mathbb{Q}+$ und die Menge der rationalen Quadratzahlen mit $\mathbb{Q}^2$.
Nach unserer Überlegung in Aufgabe 3 über die Gleichheit von Mengen sind also $\mathbb{Q}+$ und $\mathbb{Q}^2$ gleich groß. Fügt man einerseits zu $\mathbb{Q}+$ die reelle Zahl $5^{\frac{1}{2}}$ und andererseits zu $\mathbb{Q}^2$ die

Zahl 5, dann erhält man wieder gleich große Mengen. Nun ist aber $\mathbb{Q}^2 \cup \{5\}$ als Teilmenge von $\mathbb{Q}$ sicher nicht größer als $\mathbb{Q}$. Also ist auch $\mathbb{Q}^+ \cup \{5\frac{1}{2}\}$ nicht größer als $\mathbb{Q}$.

Bemerkung: Nur endliche Mengen werden größer, wenn man ein einzelnes Element hinzufügt.

***Hinweis:** Die im Folgenden als* Vorbereitung *bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.*

Vorbereitung 1

Versuchen Sie, selbst zu erarbeiten, was es heissen könnte, dass eine Menge A „kleiner" ist als eine Menge B.

1. Warum läßt sich behaupten, dass die Menge $\mathbb{Q}$ nicht „größer" sein kann als $\mathbb{N}$?

2. Ist die Menge der geraden natürlichen Zahlen „kleiner" als $\mathbb{N}$? Begründung!

Lösungsvorschlag

Eine naheliegende und sinnvolle Vorstellung ist, dass eine Teilmenge A einer Menge B nicht „größer" sein kann als B. Wenn eine weitere Menge A' gleich „groß" (wir sagen auch gleich mächtig) ist wie A, dann kann auch A' nicht „größer" sein als B. Damit nun A „kleiner" ist als B, darf A nicht „größer" sein als B und auch nicht gleich mächtig sein wie B.

1. Die Menge der Brüche mit positiven Zähler und Nenner entspricht der Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ der Paare (m, n) von natürlichen Zahlen. Die Menge der vollständig gekürzten Brüche entspricht einer Teilmenge von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gleich groß ist wie $\mathbb{N}$, kann die Menge der positiven rationalen Zahlen nicht größer sein als $\mathbb{N}$.

   Nun überlegt man sich noch, dass $\mathbb{Q}$ nicht größer ist als die Menge $\mathbb{Q}^+$ der positiven rationalen Zahlen. Wir bezeichnen dazu die Menge der negativen rationalen Zahlen mit $\mathbb{Q}^-$. Dann gilt $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$. Natürlich reichen die Paare natürlicher Zahlen vollständig aus um alle Elemente aus $\mathbb{Q}$ zu kodieren. Man nehme z. B. vollständig gekürzte Brüche für die positiven rationalen Zahlen. Für negative rationale Zahlen kann man Paare (a, b) nehmen mit $ggT(a, b) = 2$. Und die 0 könnten wir durch $(3, 3)$ darstellen.

   Im Ergebnis schließen wir, dass $\mathbb{Q}$ nicht „größer" ist als $\mathbb{N}$.

2. Die Menge der geraden natürlichen Zahlen ist gleich groß wie $\mathbb{N}$, insbesondere also nicht „kleiner".

   Zur Begründung ordnet man jeder natürlichen Zahl n die Zahl $2n$ zu.

Vorbereitung 2

Alle reellen Zahlen x mit $0 < x < 1$ besitzen eine Darstellung als unendlicher Dezimalbruch der Form $0, d_1 d_2 d_3 \dots d_n d_{n+1} \dots$. Die Ziffern d_i bezeichnen dabei natürliche Zahlen aus $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Um Eindeutigkeit zu erzielen, verlangt man, dass es keinen Index j gibt, so dass für alle $i > j$ $d_i = 9$ gilt.

Erarbeiten Sie eine Vorschrift für die Addition von Zahlen $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < 1$, die als unendliche Dezimalbrüche gegeben sind.

Lösungsvorschlag

Seien zwei unendliche Dezimalbrüche a und b der Form
$0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_{n+1} \dots$ und $0, b_1 b_2 b_3 \dots b_n b_{n+1} \dots$ gegeben.
Wir wollen den unendlichen Dezimalbruch für die Summe $s = a + b$ berechnen. Für s gilt jedenfalls $0 < s < 2$ mit $s = s_0, s_1 s_2 s_3 \dots s_n \dots$.

Dazu addieren wir zunächst jede Dezimalstelle a_i von a mit der entsprechenden Dezimalstelle b_i von b und schreiben die Ziffernsumme einer Stelle i als $c_i = a_i + b_i$.
Falls nach einer gewissen Stelle j für alle Stellen i $c_i = 9$ gilt für alle $i > j$, und aber $c_j \neq 9$, dann schneiden wir beide Dezimalbrüche a und b nach der j-ten Stelle ab und addieren zur Summe der verbleibenden endlichen Dezimalbrüche an der j-ten Stelle eine 1.
Andernfalls berechnen wir n Stellen von s für beliebiges n wie folgt:
Wir suchen erst eine Stelle j mit $j > n$, so dass $c_j \neq 9$ gilt.
Dann schneiden wir die Dezimalbrüche von a und b nach der Stelle j ab und summieren wie bei endlichen Dezimalbrüchen. Dadurch erhalten wir mindestens die ersten n Stellen.

Tutoraufgabe 1

Beweisen Sie, dass die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 nicht abzählbar ist.

Lösungsvorschlag

Wir betrachten, wie in der Vorbereitungsaufgabe 2, nur reelle Zahlen x zwischen 0 und 1, die wir uns durch unendliche Dezimalbrüche dargestellt denken, und zwar in der eindeutigen Weise wie in der Vorbereitungsaufgabe 2.
Wenn diese Menge abzählbar wäre, dann könnten wir sie aneinanderreihen oder auflisten als $x_1, x_2, x_3, \ldots$, und mit der Darstellung durch unendliche Dezimalbrüche schreiben als

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \mathbf{d_{1,1}} d_{1,2} d_{1,3} \ldots \\ x_2 &= 0, d_{2,1} \mathbf{d_{2,2}} d_{2,3} \ldots \\ x_2 &= 0, d_{3,1} d_{3,2} \mathbf{d_{3,3}} \ldots \\ x_4 &= \ldots \\ \ldots \end{aligned}$$

Wir können nun leicht einen unendlichen Dezimalbruch $0, z_1 z_2 z_3 \ldots$ angeben, der nicht in der Auflistung vorkommen kann. Man braucht lediglich eine Folge von Ziffern 4 oder 5 zu definieren nach der folgenden Regel:
Falls $\mathbf{d_{i,i}} = 5$, dann setzen wir $z_i = 4$, und falls $\mathbf{d_{i,i}} \neq 5$, dann setzen wir $z_i = 5$.
Im Ergebnis also kann $\mathbf{R}$ nicht abzählbar sein.

Tutoraufgabe 2

Bestimmen Sie die Wahrheitstabelle für den folgenden booleschen Ausdruck:

$$((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)) \vee (B \wedge C)\,.$$

Lösungsvorschlag

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow C$	$B \wedge C$	$(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)$	$((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)) \vee (B \wedge C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	1	1

Tutoraufgabe 3

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen über boolsche Ausdrücke. Diskutieren Sie dabei unterschiedliche Beweismethoden.

1. $p \Leftrightarrow q$ und $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ sind äquivalent.

2. $p \Leftrightarrow q$ und $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ sind äquivalent.

3. $(\neg p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \neg q$ ist eine Tautologie.

4. $(\neg q \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \neg p$ ist eine Tautologie.

5. $p \Rightarrow q$ ist äquivalent zu $\neg q \Rightarrow \neg p$.

6. $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ ist eine Tautologie.

7. $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$ und $p \Rightarrow (q \wedge r)$ sind äquivalent.

Lösungsvorschlag

1. Das Bikonditional $\Leftrightarrow$ wurde auf Vorlesungsfolie 33 vom 23.10.2007 definiert durch

$$p \Leftrightarrow q := (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \,.$$

Die Definition wird stets als Äquivalenz verstanden. Es gibt nichts zu beweisen.

2. Man beachte, dass wir die Möglichkeiten der Weglassung von Klammern ausnutzen. Wir beweisen die Äquivalenz durch Anwendung der Äquivalenzregeln von Vorlesungsfolie 6 vom 26.10.2007. Wir wenden insbesondere die sehr wichtige Ersetzungsregel an, die besagt, dass man Teilausdrücke äquivalent ersetzen darf. Beachten Sie, dass auch die Kommutativität der Konnektoren ausgenutzt wird. Wir notieren dies nicht gesondert.

$$\begin{array}{lll}
(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) & & \\
\equiv & ((p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg p)) \wedge ((p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg q)) & (2\times \text{ Distr.}) \\
\equiv & (T \wedge (q \vee \neg p)) \wedge ((p \vee \neg q) \wedge T) & (\text{Triv. Taut.}) \\
\equiv & (q \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg q) & (\text{Id.}) \\
\equiv & (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) & (\text{s. Vorl.}) \\
\equiv & p \Leftrightarrow q & (\text{bekannt.})
\end{array}$$

Die Implikation $(p \Rightarrow q)$ wurde auf Folie 24 durch Wahrheitstabelle eingeführt, die Äquivalenz mit $(q \vee \neg p)$ kann durch Vergleich der Wahrheitstabellen bewiesen werden.

3. Substituiert man eine Variable einer Äquivalenzbeziehung durch einen Ausdruck, dann erhält man wieder eine Äquivalenz. Dies ist ebenfalls eine wichtige Regel zur Herleitung von Äquivalenzen.

Wir substituieren p durch F und q durch T, und erhalten den Ausdruck $(\neg F \wedge (F \Rightarrow T)) \Rightarrow \neg T$. Nun gilt

$$\begin{array}{rcl}
(\neg F \wedge (F \Rightarrow T)) \Rightarrow \neg T & \equiv & (T \wedge (\neg F \vee T)) \Rightarrow F \\
& \equiv & T \Rightarrow F \\
& \equiv & F \,.
\end{array}$$

Da jede Spezialisierung einer Tautologie äquivalent mit T sein muß, ist die zu betrachtende Aussage also falsch. D. h., es liegt keine Tautologie vor.

4. $(\neg q \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \neg p \quad \equiv \quad \neg(\neg q \wedge (\neg p \vee q)) \vee \neg p \quad \equiv$
$(q \vee (p \wedge \neg q)) \vee \neg p \quad \equiv \quad ((q \vee p) \wedge (q \vee \neg q)) \vee \neg p \quad \equiv$
$((q \vee p) \wedge T) \vee \neg p \quad \equiv \quad q \vee p \vee \neg p \quad \equiv \quad q \vee T \quad \equiv \quad T \,.$
Der Ausdruck ist also eine Tautologie.

5. $p \Rightarrow q \quad \equiv \quad \neg p \vee q \quad \equiv \quad \neg(\neg q) \vee (\neg p) \quad \equiv \quad \neg q \Rightarrow \neg p\,.$

6. $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \quad \equiv \quad ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)) \Rightarrow (\neg p \vee r) \quad \equiv$
   $\neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)) \vee (\neg p \vee r) \quad \equiv \quad (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r \quad \equiv$
   $\neg p \vee (p \wedge \neg q) \vee r \vee (q \wedge \neg r) \quad \equiv \quad ((\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee ((r \vee q) \wedge (r \vee \neg r)) \quad \equiv$
   $(\neg p \vee \neg q) \vee (r \vee q) \quad \equiv \quad q \vee \neg q \vee r \vee \neg p \quad \equiv \quad T\,.$
   Der Ausdruck ist also eine Tautologie.

7. $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \quad \equiv \quad (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \quad \equiv \quad \neg p \vee (q \wedge r) \quad \equiv \quad p \Rightarrow (q \wedge r)\,.$