Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 15
Computergraphik & Visualisierung
Prof. Dr. Rüdiger Westermann
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2007/08
Lösungsblatt 2
7. November 2007

Diskrete Strukturen

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Beantworten Sie die Frage, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind entsprechend mit Ja bzw. Nein. Bei dem Begriff „gleich groß“ beziehen wir uns auf Übungsblatt 1.

1. Es gibt verschiedene Primzahlen p und q mit $ggT(p,q) = 17$!?
2. Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$ sind „gleich groß“!?
3. Es gibt „mehr“ Brüche als rationale Zahlen!?
4. Es gibt eine reelle Zahl $x > 1$, für die sowohl $x^{\frac{1}{2}}$ als auch $x^{\frac{1}{3}}$ rationale Zahlen sind!?
5. Die Mengen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ sind „gleich groß“!?

Lösungsvorschlag

1. Nein!
2. Ja! (Man betrachte die Paarbildung $(n, n+1)$)
3. Nein! (siehe Blatt 1, H3)
4. Ja! (z.B. $x = 2^6$)
5. Nein! (siehe Blatt 1, T1)

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Beweisen Sie die Assoziativität des Bikonditional $\Leftrightarrow$, d. h.

$$(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z \;\equiv\; x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z)\,,$$

1. durch Verwendung von Wahrheitstabellen!
2. durch Fallunterscheidung, indem Sie gesondert $y = T$ bzw. $y = F$ betrachten und jeweils mit Äquivalenzregeln vereinfachen!

Berechnen Sie für alle x, y, z den Ausdruck

$$((x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z) \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z))\,.$$

Lösungsvorschlag

1.

x	y	z	$x \Leftrightarrow y$	$y \Leftrightarrow z$	$(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z$	$x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z)$
1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	0

Da die beiden letzten Spalten der Tabelle gleich sind, gilt die Äquivalenzbeziehung.

2. Im ersten Fall substituieren wir $y = T$. Die Linke Seite der Äquivalenz läßt sich dann vereinfachen zu $x \Leftrightarrow z$, ebenso wie die rechte Seite. Wir können die beiden Berechnungen als Kette schreiben. Die Benutzung von $\neg T \equiv F$ und $\neg F \equiv T$ notieren wir nicht gesondert:

$$\begin{aligned}
(x \Leftrightarrow T) \Leftrightarrow z &\equiv ((x \Rightarrow T) \wedge (T \Rightarrow x)) \Leftrightarrow z && \text{(Def.)}\\
&\equiv ((\neg x \vee T) \wedge (\neg T \vee x)) \Leftrightarrow z && \text{(Vorl.)}\\
&\equiv x \Leftrightarrow z && \text{(Dom., Ident.)}\\
&\equiv x \Leftrightarrow ((\neg T \vee z) \wedge (\neg z \vee T)) && \text{(Ident, Dom.)}\\
&\equiv x \Leftrightarrow ((T \Rightarrow z) \wedge (z \Rightarrow T)) && \text{(Vorl.)}\\
&\equiv x \Leftrightarrow (T \Leftrightarrow z)\,. && \text{(Def.)}
\end{aligned}$$

Im zweiten Fall substituieren wir $y = F$ und reduzieren die linke Seite zu $\neg x \Leftrightarrow z$, und anschließend die rechte Seite zu $x \Leftrightarrow \neg z$ wie folgt.

$$\begin{aligned}
(x \Leftrightarrow F) \Leftrightarrow z &\equiv ((x \Rightarrow F) \wedge (F \Rightarrow x)) \Leftrightarrow z && \text{(Def.)}\\
&\equiv ((\neg x \vee F) \wedge (\neg F \vee x)) \Leftrightarrow z && \text{(Vorl.)}\\
&\equiv \neg x \Leftrightarrow z\,. && \text{(Ident., Dom.)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \Leftrightarrow (F \Leftrightarrow z) &\equiv x \Leftrightarrow ((F \Rightarrow z) \wedge (z \Rightarrow F)) && \text{(Def.)}\\
&\equiv x \Leftrightarrow ((\neg F \vee z) \wedge (\neg z \vee F)) && \text{(Vorl.)}\\
&\equiv x \Leftrightarrow \neg z\,. && \text{(Dom., Ident.)}
\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen

$$\begin{aligned}
\neg x \Leftrightarrow z &\equiv (\neg x \Rightarrow z) \wedge (z \Rightarrow \neg x) && \text{(Def.)}\\
&\equiv (\neg z \Rightarrow \neg\neg x) \wedge (\neg\neg x \Rightarrow \neg z) && \text{(Inverse)}\\
&\equiv (\neg z \Rightarrow x) \wedge (x \Rightarrow \neg z) && \text{(Dopp. Neg.)}\\
&\equiv x \Leftrightarrow \neg z\,. && \text{(Def.)}
\end{aligned}$$

Die geforderte Berechnung ist trivial für alle x, y, z, denn der Bikonditionalausdruck ist eine Tautologie. Es gilt

$$((x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z) \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z)) \equiv T\,.$$

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Widerlegen Sie:

1. Falls A keine Tautologie ist, dann ist A eine Kontradiktion.
2. $((x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z) \;\equiv\; (x \Leftrightarrow y) \wedge (y \Leftrightarrow z)$.

Lösungsvorschlag

1. *Hinweis*: In der Aufgabenstellung wurde ursprünglich die Bezeichnung T für jetzt A verwendet.

   Eine Tautologie ist ein aussagenlogischer Ausdruck A, der für alle Ersetzungen (Belegungen) der Aussagenvariablen von A durch Ausdrücke T (wahr) oder F (falsch) den Wert T (wahr) ergibt.

   Eine Kontradiktion ist ein aussagenlogischer Ausdruck A, der für alle Ersetzungen der Aussagenvariablen von A durch Werte T (wahr) oder F (falsch) den Wert F (falsch) darstellt.

   Also ist der Ausdruck A, der z. B. gleich der aussagenlogischen Variablen A sei, weder eine Tautologie noch eine Kontradiktion.

2. Seien $x = F$, $y = F$ und $z = T$. Wir berechnen die linke bzw. rechte Seite der Äquivalenz und vergleichen die berechneten Werte.

$$\begin{aligned} (x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z &\equiv (F \Leftrightarrow F) \Leftrightarrow T \\ &\equiv T \Leftrightarrow T \\ &\equiv T\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x \Leftrightarrow y) \wedge (y \Leftrightarrow z) &\equiv (F \Leftrightarrow F) \wedge (F \Leftrightarrow T) \\ &\equiv T \wedge F \\ &\equiv F\,. \end{aligned}$$

   Damit ist die Aussage widerlegt, d. h. falsch.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Zeigen Sie durch Anwendung von Äquivalenzregeln die sogenannte „goldene Regel“

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow p \;\equiv\; q \Leftrightarrow (p \vee q)\,.$$

Lösungsvorschlag

Wir bemerken zunächst, dass der linke Ausdruck implizit die Implikation $(p \wedge q) \Rightarrow p$ enthält, die eine Tautologie ist und bei den Inferenzregeln in Gestalt der Vereinfachungsregel auftritt. Wir zeigen

$$\begin{aligned}
(p \wedge q) \Rightarrow p &\equiv \neg(p \wedge q) \vee p && \text{(Def.)}\\
&\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee p && \text{(De Morgan)}\\
&\equiv (\neg p \vee \neg p) \vee q && \text{(Ass., Komm.)}\\
&\equiv T\,. && \text{(Triv.Taut., Dom.)}
\end{aligned}$$

Die rechte Seite enthält implizit die Implikation $q \Rightarrow (p \vee q)$, die eine Tautologie ist und bei den Inferenzregeln in Gestalt der Additionsregel auftritt. Wir zeigen

$$\begin{aligned}
q \Rightarrow (p \vee q) &\equiv \neg q \vee (p \vee q) && \text{(Def.)}\\
&\equiv (\neg q \vee q) \vee p && \text{(Komm., Ass.)}\\
&\equiv T\,. && \text{(Triv.Taut., Dom.)}
\end{aligned}$$

Nun rechnen wir

$$\begin{aligned}
(p \wedge q) \Leftrightarrow p &\equiv ((p \wedge q) \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow (p \wedge q))\\
&\equiv T \wedge (p \Rightarrow (p \wedge q))\\
&\equiv p \Rightarrow (p \wedge q)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
q \Leftrightarrow (p \vee q) &\equiv (q \Rightarrow (p \vee q)) \wedge ((p \vee q) \Rightarrow q)\\
&\equiv T \wedge ((p \vee q) \Rightarrow q)\\
&\equiv (p \vee q) \Rightarrow q\,.
\end{aligned}$$

Schließlich zeigen wir $p \Rightarrow (p \wedge q) \equiv (p \vee q) \Rightarrow q$ wie folgt.

$$\begin{aligned}
p \Rightarrow (p \wedge q) &\equiv \neg p \vee (p \wedge q)\\
&\equiv (\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q) && \text{(Distr.)}\\
&\equiv \neg p \vee q\\
&\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)\\
&\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee q && \text{(Distr.)}\\
&\equiv \neg(p \vee q) \vee q && \text{(De Morgan)}\\
&\equiv (p \vee q) \Rightarrow q\,.
\end{aligned}$$

Hinweis: *Die im Folgenden als* Vorbereitung *bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.*

Vorbereitung 1

Es wird erzählt, dass in einem kleinen Dorf in Bayern ein alter Barbier lebt, der genau alle diejenigen Männer im Dorf rasiert, die sich nicht selbst rasieren.
Warum ist die Frage nach dem Alter des Barbiers sinnlos?
Leiten Sie rein logisch her, dass der Barbier nicht existieren kann!
Versuchen Sie, den Sachverhalt prädikatenlogisch zu formalisieren und weisen Sie nach, dass die Erzählung eine Lüge enthält!

Lösungsvorschlag

Die Frage nach dem Alter des Barbiers ist sinnlos, weil der Barbier nicht existiert. Dies können wir sagen, ohne den Erzähler zu kennen und ohne darüber mutmaßen zu müssen, ob es nicht einen Erzähler geben könnte, der vielleicht tatsächlich einen solchen Barbier kennt. Denn wir können logisch herleiten, dass der Barbier nicht existiert. Und das hat nichts mit einem Paradoxon zu tun. Es ist eine schlichte, logische Tatsache, die wir wie folgt beweisen.

Sei $R(x, y)$ ein Prädikat, das genau dann wahr ist, wenn x den Mann y rasiert. Für einen Barbier b trifft dann das folgende Prädikat $B(b)$ zu

$$B(b) = \forall x \; (\neg R(x, x) \Leftrightarrow R(b, x)) \,.$$

Würde aber ein Barbier b existieren, dann müßte auch für $x = b$ gelten

$$(\neg R(b, b) \Leftrightarrow R(b, b)) \,,$$

was aber ein Widerspruch ist. Die Erzählung muß also eine Lüge enthalten.

Vorbereitung 2

Was versteht man unter dem „Modus Ponens"?
Geben Sie ein einfaches Beispiel für die Anwendung einer Inferenzregel!

Lösungsvorschlag

Der Modus Ponens ist eine Inferenzregel, mit der man auf die Gültigkeit einer Aussage Q schließen kann, falls die Aussagen P und $P \Rightarrow Q$ gültig sind.
Beispiel: Der 31.10.07 ist ein Mittwoch. Wenn der 31.10.07 ein Mittwoch ist, dann ist der 31.10.08 ein Freitag. Also ist der 31.10.08 ein Freitag.

Vorbereitung 3

Es seien $m, n, k \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen mit $m > n \cdot k$. Zeigen Sie:

> Verteilt man m Bälle auf n Schubladen, so befinden sich in mindestens einer Schublade $k + 1$ oder mehr Bälle.

Führen Sie einen informellen, aber präzisen Beweis, indem Sie annehmen, in allen Schubläden würden sich nach einer Verteilung weniger als $k + 1$ Bälle befinden.

Lösungsvorschlag

Wir bezeichnen die Anzahl der in Schublade i $(1 \leq i \leq n)$ befindlichen Bälle als b_i. Zu zeigen ist dann

$$(\exists i)[b_i \geq k + 1].$$

Indirekter Beweis:
Annahme: Für alle i gelte $b_i \leq k$.
Dann schätzen wir die Gesamtzahl m aller Bälle in den Schubladen ab mit

$$m = \sum_{i=1}^{n} b_i \leq \sum_{i=1}^{n} k \leq n \cdot k.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $m > n \cdot k$.

Tutoraufgabe 1

In dieser Aufgabe interpretieren wir Prädikate informell in natürlicher Sprache. Im späteren Verlauf der Vorlesung werden wir die Interpretation durch Mengen und Relationen abstrakt einführen.

1. Definieren Sie ein geeignetes Prädikat $P(x, y)$, so dass gleichzeitig die beiden folgenden Formeln gelten.

$$(\neg\exists x)(\forall y)(P(x, y)) \quad \text{und} \quad (\forall y)(\exists x)(P(x, y)) .$$

2. Widerlegen Sie:

$$(\exists x\ \forall y)(Q(x, y)) \quad \equiv \quad (\forall y\ \exists x)(Q(x, y)) .$$

3. Geben Sie eine zu $(\neg\exists x)(\forall y)(P(x, y))$ äquivalente prädikatenlogische Formel an, in der der Verneinungsoperator $(\neg)$ nicht links neben einem logischen Quantor vorkommt.

Lösungsvorschlag

1. Betrachten wir alle Menschen, die leben oder gelebt haben, zusammen mit dem Prädikat $P(x, y)$, das besagt, dass x Vorfahre von y ist.

   Dann gilt nach landläufiger Ansicht, dass jeder Mensch y mindestens einen Vorfahren x besitzt.

   Also ist die Aussage $(\forall y)(\exists x)(P(x, y))$ gültig.

   Da nun, ebenfalls nach landläufiger Ansicht, kein Mensch Vorfahre von sich selbst ist, gibt es zu jedem x mindestens ein y, nämlich $y = x$, für das $\neg P(x, y)$ gilt. Also ist das Prädikat $Q(x) = (\forall y)(P(x, y))$ für alle x falsch.

   Folglich ist die Aussage $(\neg\exists x)(\forall y)(P(x, y))$ gültig.

2. Offenbar wird die Äquivalenz für beliebige Prädikate Q behauptet, müßte also auch für $P(x, y)$ aus der vorausgegangenen Teilaufgabe gelten.

   Für P gilt $(\forall y)(\exists x)(P(x, y))$ und $(\neg\exists x)(\forall y)(P(x, y))$. Wäre die behauptete Äquivalenz gültig, dann würde folgen

$$\begin{aligned}
(\neg\exists x)(\forall y)(P(x, y)) \quad &\equiv \quad (\forall y)(\exists x)(P(x, y)) \\
&\equiv \quad (\exists x\ \forall y)(P(x, y)) \\
&\equiv \quad \neg\,(\neg\exists x)(\forall y)(P(x, y)) .
\end{aligned}$$

   Dies ist ein Widerspruch, also ist die behauptete Äquivalenz nicht gültig.

3.

$$\begin{aligned}
(\neg\exists x)(\forall y)(P(x, y)) \quad &\equiv \quad (\forall x)(\neg\forall y)(P(x, y)) \\
&\equiv \quad (\forall x)(\exists y)(\neg P(x, y)) .
\end{aligned}$$

Tutoraufgabe 2

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion

1. die Gleichung
$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$
2. die Aussage in der Vorbereitungsaufgabe 3.

Lösungsvorschlag

1. Wir zeigen die Gültigkeit der Gleichung für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

   Bei Induktionsbeweisen kann es durchaus schwierig sein, einen Ansatz für eine Eigenschaft $P(n)$ zu finden, deren Gültigkeit dann für alle $n \in \mathbb{N}_0$ bewiesen werden kann und die die Gültigkeit des Beweiszieles miteinschließt. In der Informatik nennt man das das Einbettungsproblem.

   In dieser Hinsicht ist die vorliegenden Aufgabe allerdings einfach. Die Eigenschaft $P(n)$ definieren wir direkt als die Gültigkeit der Gleichung für n. Wir beweisen nun nach bekanntem Schema die Aussage $\forall n \in \mathbb{N}_0 : P(n)$.

   Gültigkeit von $P(n)$ für $n = 0$:
   Es gilt offenbar
$$\sum_{i=0}^{0} i^2 = 0 = \frac{0 \cdot (0+1) \cdot (2 \cdot 0 + 1)}{6}.$$
   Induktionsschluss für alle $n \geq 0$: Falls $P(n)$ für n gilt, dann gilt auch $P(n+1)$.

   Beweis:
   Sei $n \geq 0$. Dann gilt
$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=0}^{n} i^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}.
\end{aligned}$$
   Damit haben wir die Gleichung bewiesen
$$\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}.$$
   Sie bedeutet die Gültigkeit von $P(n+1)$.

2. Durch Induktion über n zeigen wir für alle $n \geq 1$ die Eigenschaft

$$P(n) := (\forall m, k; m > n \cdot k)\ (\exists i; 1 \leq i \leq n)[b_i \geq k+1].$$

Induktionsanfang $n = 1$: Bei nur einer vorhandenen Schublade kommen natürlich alle $m > k$ Bälle, also mindenstens $k+1$ Bälle in der Schublade zu liegen. D. h., es gilt $P(1)$.

Induktionsschluss $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ für alle $n \geq 1$, wir setzen also $P(n)$ voraus und haben nun $P(n+1)$ zu zeigen: Wir verteilen m Bälle auf $n+1$ Schubladen und es gelte $m > (n+1) \cdot k$.

Wir betrachten eine beliebige, sagen wir $(n+1)$. Schublade. Falls die Schublade $k+1$ Bälle enthält, dann sind wir fertig, d. h. $P(n+1)$ ist gezeigt. Falls aber diese Schublade nur $b_i \leq k$ Bälle enthält, dann wurden $m - b_{n+1}$ Bälle auf die restlichen n Schubladen verteilt, so dass gilt

$$m - b_i \geq m - k > (n+1) \cdot k - k = n \cdot k.$$

Aus der vorausgesetzten Eigenschaft $P(n)$ folgt damit, dass es eine unter den restlichen n Schubladen gibt, die mindestens $k+1$ Bälle enthält. Damit ist $P(n+1)$ auch in diesem Fall bewiesen.