Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 15
Computergraphik & Visualisierung
Prof. Dr. Rüdiger Westermann
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2007/08
Lösungsblatt 3
31. Januar 2008

Diskrete Strukturen

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Wir untersuchen die Inferenzregel der Resolution.

1. Zeigen Sie durch Anwendung von Äquivalenzregeln

$$(P \vee Q) \wedge (R \vee \neg Q) \Rightarrow (P \vee R)\,.$$

2. Widerlegen Sie die Umkehrung

$$(P \vee R) \Rightarrow (P \vee Q) \wedge (R \vee \neg Q)\,.$$

Lösungsvorschlag

1. Die Ausnutzung der Kommutativität und Assoziativität der Konnektoren notieren wir nicht gesondert.

$$\begin{aligned}
&(P \vee Q) \wedge (R \vee \neg Q) \Rightarrow (P \vee R) && \\
&\quad\equiv \quad \neg[(P \vee Q) \wedge (R \vee \neg Q)] \vee (P \vee R) && \text{(Def.)}\\
&\quad\equiv \quad (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg R \wedge \neg\neg Q) \vee (P \vee R) && \text{(3× De Morgan)}\\
&\quad\equiv \quad [(\neg P \wedge \neg Q) \vee P] \vee [(\neg R \wedge Q) \vee R] && \text{(D.Neg.)}\\
&\quad\equiv \quad [(\neg P \vee P) \wedge (\neg Q \vee P)] \vee [(\neg R \vee R) \wedge (Q \vee R)] && \text{(2× Distr.)}\\
&\quad\equiv \quad [T \wedge (\neg Q \vee P)] \vee [(T \wedge (Q \vee R)] && \text{(Triv.Taut.)}\\
&\quad\equiv \quad (\neg Q \vee P) \vee (Q \vee R) && \text{(Ident.)}\\
&\quad\equiv \quad T \vee P \vee R && \text{(Triv.Taut.)}\\
&\quad\equiv \quad T\,. && \text{(Dom.)}
\end{aligned}$$

2. Wir wählen $P = T$, $R = F$ und $Q = T$. Dann besitzt die Implikation den Wert F, wie die folgende Rechnung zeigt.

$$\begin{aligned}
&(P \vee R) \Rightarrow (P \vee Q) \wedge (R \vee \neg Q)\\
&\quad\equiv \quad (T \vee F) \Rightarrow (T \vee T) \wedge (F \vee \neg T)\\
&\quad\equiv \quad T \Rightarrow T \wedge F\\
&\quad\equiv \quad T \Rightarrow F\\
&\quad\equiv \quad F\,.
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Seien A, B, C, D, E beliebige Aussagen, für die die Prämissen $\neg A \wedge B$, $C \Rightarrow A$, $\neg C \Rightarrow D$ und $D \Rightarrow E$ gültig sind. Folgern Sie durch Anwendung von Inferenzregeln die Gültigkeit der Konklusion

$$(\neg C \wedge D) \wedge E\,.$$

Protokollieren Sie die Anwendungen der Inferenzregeln.

Lösungsvorschlag

Wir erweitern die Menge der Prämissen schrittweise durch Anwendung von Inferenzregeln so lange, bis der zu beweisende konjunktionale Ausdruck in der erweiterten Menge enthalten ist.
Der Vollständigkeit halber listen wir zunächst die Prämissen P1 bis P4 auf. Die Bezeichnungen der Inferenzregeln seien wie in der Vorlesung gegeben. Zur Erinnerung: Es gibt Additionsregel, Vereinfachung, Konjunktionsregel, Modus Ponens (Abtrennregel), Modus Tollens (Widerlegungsregel), Kettenschluß, logischer Anschluß und Resolution (siehe Folien vom 30.10.07).

Protokoll:

P1	:	$\neg A \wedge B$	
P2	:	$C \Rightarrow A$	
P3	:	$\neg C \Rightarrow D$	
P4	:	$D \Rightarrow E$	
1	:	$\neg A$	Vereinfachung mit (P1)
2	:	$\neg C$	Modus tollens mit (1) und (P2)
3	:	D	Modus ponens mit (2) und (P3)
4	:	E	Modus ponens mit (3) und (P4)
5	:	$(\neg C \wedge D)$	Konjunktionsregel mit (2) und (3)
6	:	$(\neg C \wedge D) \wedge E$	Konjunktionsregel mit (4) und (5)

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Wir betrachten Prädikate $A(x)$ und $B(x)$, für die wir die Aussagen
$(\exists x)(A(x))$ und $(\forall x)(A(x) \Rightarrow B(x))$ als Prämissen annehmen wollen. Folgern Sie durch Anwendung von Inferenzregeln für Quantoren die Gültigkeit der Konklusion

$$(\exists x)(B(x))\,.$$

Orientieren Sie sich an dem in der Vorlesung gegebenen Beispiel und protokollieren Sie die Herleitungsschritte.

Lösungsvorschlag

Wir gehen analog vor wie in der vorausgegangenen Aufgabe H2. Nun allerdings benutzen wir die Inferenzregeln für Quantoren, also Universelle Instantiierung, Universelle Generalisierung, Existentielle Instantiierung und Existentielle Generalisierung.
Man beachte, dass die Inferenzregeln nicht nur Aussagen produzieren, sondern im Fall der Existentiellen Instantiierung auch ein Objekt, auf das sich ein Prädikat beziehen kann.

Protokoll:

P1 :	$(\exists x)(A(x)$	
P2 :	$(\forall x)(A(x) \Rightarrow B(x))$	
1 :	$A(c)$	Exist. Instant. eines neuen Elements c mit (P1)
2 :	$A(c) \Rightarrow B(c)$	Univ. Instant. mit (P2)
3 :	$B(c)$	Modus ponens mit (1) und (2)
4 :	$(\exists x)(B(x))$	Exist. General. mit (3)

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Betrachten Sie die folgende Funktion: $f(n) := f(n-1) + 2n - 1$ für $n \geq 2$ und $f(1) = 1$.

1. Werten Sie $f(2), f(3), \ldots, f(8)$ aus!
2. Geben Sie eine geschlossene Form (arithmetischen Ausdruck) für $f(n)$ an!
3. Beweisen Sie Ihre in 2. gemachte Annahme mittels vollständiger Induktion!

Lösungsvorschlag

1. Tabelle $f(2), \ldots, f(8)$.

$$
\begin{aligned}
f(2) &= f(1) + 2 \cdot 2 - 1 &= 4\\
f(3) &= f(2) + 3 \cdot 2 - 1 &= 9\\
f(4) &= f(3) + 4 \cdot 2 - 1 &= 16\\
f(5) &= f(4) + 5 \cdot 2 - 1 &= 25\\
f(6) &= f(5) + 6 \cdot 2 - 1 &= 36\\
f(7) &= f(6) + 7 \cdot 2 - 1 &= 49\\
f(8) &= f(7) + 8 \cdot 2 - 1 &= 64
\end{aligned}
$$

2. Die Tabelle legt die Vermutung nahe, dass $f(n) = n^2$ für alle $n \geq 1$.

3. Wir zeigen $\forall n \in \mathbb{N} : \; P(n)$ mit vollständiger Induktion, wobei wir die Aussage $P(n)$ wählen als Gültigkeit der Gleichung $f(n) = n^2$.

   Behauptung: $P(n)$, d. h. $f(n) = n^2$, gilt für alle $n \geq 1$.

   Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $f(n) = f(1) = 1 = 1^2 = n^2$, mithin $P(1)$.
   Induktionsannahme: Es gelte $P(n)$, d. h. $f(n) = n^2$ für ein $n \geq 1$.
   Induktionsschluss: Dann gilt auch $P(n+1)$, d. h. $f(n+1) = (n+1)^2$ wie folgt.

$$
\begin{aligned}
f(n+1) &= f(n) + 2 \cdot (n+1) - 1 && \text{(Def.)}\\
&= f(n) + 2 \cdot n + 1 &&\\
&= n^2 + 2 \cdot n + 1 && \text{(nach Ind.-Annahme)}\\
&= (n+1)^2 && \text{(binomische Formel)}
\end{aligned}
$$

Hinweis: *Die im Folgenden als* Vorbereitung *bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.*

Vorbereitung 1

Die Potenzmenge einer Menge A ist definiert als die Menge aller Teilmengen von A, formal $\mathcal{P}(A) = \{x \,|\, x \subseteq A\}$. $\mathcal{P}(A)$ enthält somit sowohl die leere Menge $\emptyset$ als auch die Menge A selbst.

1. Berechnen Sie die Potenzmenge von $A := \{a, b, c, d\}$. Wieviele Elemente hat diese Potenzmenge?
2. Berechnen Sie die Potenzmenge von $A := \{1, 2, 3\}$. Wieviele Elemente hat diese Potenzmenge?

Lösungsvorschlag

1. $$\begin{aligned} \mathcal{P}(A) &= \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \\ &\quad\ \{a,b,c\}, \{a,c,d\}, \{a,b,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}\,, \\ |\mathcal{P}(A)| &= 16\,. \end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned} \mathcal{P}(A) &= \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}\,, \\ |\mathcal{P}(A)| &= 8\,. \end{aligned}$$

Vorbereitung 2

Unter dem kartesischen Produkt zweier Mengen A, B, notiert $A \times B$, versteht man die Menge aller Zwei-Tupel von Elementen aus A und B:

$$A \times B := \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}\,.$$

1. Berechnen Sie das kartesische Produkt von $A := \{1, 2, 3, 4\}$ und $B := \{a, b\}$!
2. Gegeben seien zwei Mengen A, B mit $|A| = n \in \mathbb{N}_0$ und $|B| = m \in \mathbb{N}_0$.
   Welche Kardinalität hat $A \times B$?

Lösungsvorschlag

1. $A \times B := \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, a), (1, b), (2, b), (3, b), (4, b)\}$.
2. Es gilt $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

   Man beachte, dass diese Gleichung auch dann gilt, wenn eine der Mengen A oder B leer ist!

Vorbereitung 3

Geben Sie eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, die weder surjektiv noch injektiv ist!

Lösungsvorschlag

Die Abbildung $f(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist weder surjektiv noch injektiv.

Tutoraufgabe 1

Es sei die Menge (das Alphabet) $\Sigma = \{a, b, c\}$ mit Zeichen a, b und c gegeben, und es sei Σ^* die Menge aller endlichen Wörter über dem Alphabet Σ. Untersuchen Sie die Teilwortrelation $\sqsubseteq \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$, die definiert ist durch

$$\sqsubseteq \;:=\; \{(x, y) \mid \exists y_1, y_2 \in \Sigma^* : y = y_1 x y_2\}.$$

Dabei bedeutet $y_1 x y_2$ das Wort, das durch Hintereinanderschreiben (Konkatenation) der Wörter y_1, x und y_2 entsteht. Es gilt beispielsweise $ba \sqsubseteq ccabab$, aber $cb \not\sqsubseteq ccabab$. Beachten Sie, dass Σ^* auch das sogenannte leere Wort ε enthält, das als das Wort ohne Buchstaben definiert ist.

1. Welche der folgenden Eigenschaften treffen auf $\sqsubseteq$ zu: reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv? Begründen Sie Ihre Antworten.

2. Sei $H := \{x \in \Sigma^* \mid x \sqsubseteq abac\}$. Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm von $\sqsubseteq \cap (H \times H)$.

Lösungsvorschlag

1. ε bezeichne im Folgenden die leere Zeichenkette.

   $\sqsubseteq$ ist reflexiv, da $x \sqsubseteq \varepsilon x \varepsilon = x$.

   $\sqsubseteq$ ist nicht symmetrisch, da z.B. $a \sqsubseteq ab$, aber nicht $ab \sqsubseteq a$.

   $\sqsubseteq$ ist antisymmetrisch: Sei $x \sqsubseteq y$ und $y \sqsubseteq x$. Es gelte also $y = y_1 x y_2$ und $x = x_1 y x_2$. Daraus schließen wir, daß $y = y_1 x y_2 = y_1 x_1 y x_2 y_2$, und erhalten sofort $\varepsilon = y_1 x_1 = y_2 x_2$, und weiter $\varepsilon = y_i = x_i$.

   $\sqsubseteq$ ist transitiv: Sei $x \sqsubseteq y$ und $y \sqsubseteq z$. Es gelte $y = y_1 x y_2$ und $z = z_1 y z_2$. Daraus folgt $z = z_1 y_1 x z_2 y_2$ und somit $x \sqsubseteq z$.

   Damit haben wir gezeigt, daß $\sqsubseteq$ eine partielle Ordnung darstellt.

2. Das Hasse-Diagramm ist in der Abbildung 1 zu sehen. Es enthält ein minimales und ein maximales Element.

Tutoraufgabe 2

Konstruieren Sie in möglichst einfacher Weise Relationen R_1, R_2 und R_3, die die folgenden Eigenschaften besitzen.

1. R_1 ist reflexiv, symmetrisch und nicht transitiv.

2. R_2 ist asymmetrisch und nicht transitiv.

3. Die transitive Hülle von R_2 ist symmetrisch.

4. R_3 ist die transitive Hülle von R_1.

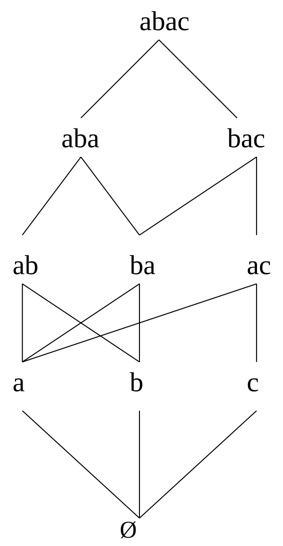

Abbildung 1: Hasse-Diagramm zu Aufgabe T 1.2 ($\emptyset$ steht für das leere Wort).

Lösungsvorschlag

1. Sei
$$R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}.$$
R_1 ist offensichtlich reflexiv und symmetrisch. R_1 ist nicht transitiv, weil zwar $(1,2) \in R_1$ und $(2,3) \in R_1$, aber $(1,3) \notin R_1$.

2. Sei
$$R_2 = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}.$$
R_2 ist asymmetrisch. R_2 ist nicht transitiv, weil zwar $(1,2) \in R_2$ und $(2,3) \in R_2$, aber $(1,3) \notin R_2$.

3. Wir müssen uns nun davon überzeugen, dass die transitive Hülle von R_2 symmetrisch ist.

   Bei der Bildung der transitiven Hülle einer Relation bedienen wir uns eines Begriffes aus der Graphentheorie und sagen, dass man ein Element y von x aus über einen "Pfad" innerhalb R erreichen kann, falls es Elemente $a_0, a_1, \ldots, a_n$ gibt mit der Eigenschaft
$$x = a_0 R a_1 R \ldots R a_n = y.$$
   Ein Pfad ist also eine Folge von Elementen, so dass je zwei benachbarte Elemente der Folge in Relation R sind.

   Die Bildung der transitiven Hülle einer Relation R kann nun durch Hinzunahme genau aller derjenigen Paare (x, y) geschehen, so dass y von x aus über irgendeinen Pfad innerhalb R erreichbar ist.

   Für die transitive Hülle R^+ von R_2 gilt
$${R_2}^+ = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(1,3),(3,1)\}.$$

Offenbar ist ${R_2}^+$ symmetrisch, weil alle überhaupt möglichen Paare in ${R_2}^+$ enthalten sind.

4. Mit der schon erwähnten Methode der Hinzunahme von Paaren (x, y) von Elementen x, y, die über einen Pfad innerhalb R_1 verbunden werden können, erhalten wir

$$ {R_1}^+ = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}. $$

Tutoraufgabe 3

1. Finden Sie ein Beispiel für Mengen X, Y, A_1, A_2 mit $A_1, A_2 \subseteq X$ und eine Abbildung $f : X \to Y$, so dass $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ gilt.

2. Ist die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = 2x$ injektiv, surjektiv, bijektiv? Begründung!

Lösungsvorschlag

1. Den Sachverhalt kann man etwa so beschreiben: Wenn zwei Mengen A_1 und A_2 disjunkt sind, so brauchen die Bilder von A_1 und A_2 noch lange nicht disjunkt zu sein.

   Seien $X = \{1, 2\}, Y = \{3\}, A_1 = \{1\}$ und $A_2 = \{2\}$.
   Nun definieren wir $f : X \to Y$ als konstante Funktion $f(x) = 3$. Es gilt

   $$ f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset \neq \{3\} = f(A_1) = f(A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)\,. $$

2. Die Injektivität einer Funktion ist definiert durch die Subjunktion

   $$ f(x) = f(y) \;\Rightarrow\; x = y. $$

   Für die Funktion $f(x) = 2x$ folgt aus $f(x) = f(y)$ zunächst $2x = 2y$, und damit $x = y$. f ist also injektiv.

   Als Bild unter f treten aber nur gerade natürliche Zahlen auf, also nicht die 1. Damit ist die Zahl 1 nicht Bild einer natürlichen Zahl x unter f, mithin ist f nicht surjektiv. Damit ist f auch nicht bijektiv.