Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 15
Computergraphik & Visualisierung
Prof. Dr. Rüdiger Westermann
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2007/08
Lösungsblatt 4
31. Januar 2008

Diskrete Strukturen

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Gegeben seien $A = \{a, 23, 42\}$, $B = \{a, 2, 3, \delta, 42\}$ und $C = \{\alpha, 2, 3, \epsilon\}$. Wir definieren $D = B \cap (A \cup C)$, $E = D \cap (A \cap B)$, $F = E \cup (A \setminus C)$ und $G = F \cap (A \cup B)$.

1. Leiten Sie zunächst eine möglichst einfache Mengengleichung für G her, ohne die Definitionen für A, B und C zu benutzen.

2. Berechnen Sie $|\mathcal{P}(G)|$.

Lösungsvorschlag

1. Durch Substitution der Variablen D erhalten wir

$$\begin{aligned} E &= (B \cap (A \cup C)) \cap (A \cap B) \\ &= ((A \cup C) \cap B) \cap (A \cap B) \\ &= (A \cup C) \cap (A \cap B) \\ &= ((A \cup C) \cap A) \cap B \\ &= (A \cap B). \end{aligned}$$

   Im letzten Schritt haben wir dabei die Gleichung $(A \cup C) \cap A = A$ benutzt. Diese Gleichung beweist man allgemein wie folgt.

$$(A \cup C) \cap A = (A \cup C) \cap (A \cup \emptyset) = A \cup (C \cap \emptyset) = A \cup \emptyset = A\,.$$

   Durch Substitution der Variablen F und E erhalten wir

$$\begin{aligned} G &= (E \cup (A \setminus C)) \cap (A \cup B) \\ &= ((A \cap B) \cup (A \setminus C)) \cap (A \cup B) \\ &= ((A \cap B) \cap (A \cup B)) \cup ((A \setminus C) \cap (A \cup B)) \\ &= (A \cap B) \cup (A \setminus C). \end{aligned}$$

   Für die letzte Gleichung haben wir $A \setminus C = A \cap \overline{C}$ benutzt.

2. Durch Überprüfung der einzelnen Elemente von A und C sieht man leicht, dass $A \cap C = \emptyset$.
   Deshalb gilt $A \setminus C = A = \{a, 23, 42\}$. Es folgt

$$G = (A \cap B) \cup A = A,$$

   und daraus

$$|\mathcal{P}(G)| = |\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^3 = 8.$$

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Über $M = \{1, 2, 3\}$ betrachten wir die Relationen $R_i \subseteq M \times M$,

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(2,3), (3,2), (1,1)\}, \\ R_2 &= \{(1,2), (2,3), (3,3)\}, \\ R_3 &= \{(1,3), (2,3), (1,1), (2,2), (3,3)\}\,. \end{aligned}$$

1. Welche dieser Relationen sind symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv?
   Welche dieser Relationen sind Abbildungen auf den entsprechenden Urbildern?

2. Berechnen Sie R_1^* und R_2^*!

Lösungsvorschlag

1. Beachten Sie, dass laut Fragestellung die Begründung oder der Beweis Ihrer Antworten nicht verlangt ist. Wir empfehlen aber dringend, die nachfolgend gegebenen Begründungen und Beweise zu studieren, insbesondere im Hinblick auf die nächsten Aufgabenblätter.

   (a) R_1 ist symmetrisch, denn zu jedem Paar (x, y) aus R_1 überprüft man leicht einzeln, dass auch (y, x) in der entsprechenden Relation ist.

   Es gilt $(1, 2) \in R_2$, aber $(2, 1) \notin R_2$, d. h. R_2 ist nicht symmetrisch.

   Es gilt $(1, 3) \in R_3$, aber $(3, 1) \notin R_3$, d. h. R_3 ist nicht symmetrisch.

   (b) Es gilt $(2, 3) \in R_1$ und $(3, 2) \in R_1$. Wäre R_1 antisymmetrisch, müsste $2 = 3$ folgen. Dies ist aber falsch, deshalb ist R_1 nicht antisymmetrisch.

   R_2 und R_3 sind antisymmetrisch.
   Wir zeigen dies explizit für R_2. Die Antisymmetrie von R_3 folgt in ähnlicher Weise.

   Beweis:
   Die formallogische Definition der Antisymmetrie für R_2 lautet

   $$\forall x, y \in M: \ (x, y) \in R_2 \land (y, x) \in R_2 \ \Rightarrow \ x = y.$$

   Sei $(x, y) \in R_2 \land (y, x) \in R_2$. Aus $(y, x) \in R_2$ folgt $x \neq 1$, weil es kein Paar $(y, 1) \in R_2$ gibt. Also folgt $x = 2$ oder $x = 3$.

   Nun kann aber $x = 2$ auch nicht gelten, weil nach Annahme ein y existiert, so dass $(2, y) \in R_2$ und gleichzeitig $(y, 2) \in R_2$ gilt, was aber in R_2 offenbar nicht erfüllbar ist.

   Es folgt also $x = 3$. Nach Annahme gilt $(3, y) \in R_2$, woraus $y = 3$ folgt, *w. z. b. w.*!

   (c) R_1 und R_2 sind nicht transitiv.

   Beweis:
   Die formallogische Definition der Transitivität für R_1 lautet

   $$\forall x, y, z \in M: \ (x, y) \in R_1 \land (y, z) \in R_1 \ \Rightarrow \ (x, z) \in R_1.$$

Wir setzen z. B. $x = 3, y = 2, z = 3$. Für diese Variablenbelegung gilt $(x, y) \in R_1$ und $(y, z) \in R_1$. Wäre R_1 transitiv, so könnte gefolgert werden $(x, z) = (3, 3) \in R_1$. Dies ist aber falsch. Also ist R_1 nicht transitiv.

Nun betrachten wir R_2 und setzen $x = 1, y = 2, z = 3$. Bei einer angenommenen Transitivität von R_2 könnte man folgern $(x, z) = (1, 3) \in R_2$. Dies ist falsch, also ist auch R_2 nicht transitiv.
W.z.b.w.!

R_3 ist transitiv.

Beweis:
Seien x, y, z beliebig mit $(x, y), (y, z) \in R_3$. Zu zeigen ist $(x, z) \in R_3$.

Falls $x = y$, dann ist nichts zu zeigen, weil dann $(x, z) \in R_3$ bereits in der Annahme enthalten ist.

Falls $x \neq y$, dann folgt $(x, y) = (1, 3)$ oder $(x, y) = (2, 3)$, jedenfalls gilt $y = 3$. Wegen $(y, z) = (3, z) \in R_3$ folgt $z = 3$. Damit bleibt zu zeigen $(x, 3) \in R_3$. Dies gilt aber für alle in Frage kommenden x, nämlich für $x = 1$ und für $x = 2$, denn es gilt $(1, 3), (2, 3) \in R$. *W. z. b. w.*!

(d) Eine Relation R ist definitionsgemäß genau dann eine Abbildung, falls R rechtseindeutig ist, d. h., falls

$$\forall x, y, z: \ (x, y) \in R \wedge (x, z) \in R \ \Rightarrow \ y = z.$$

R_1 und R_2 sind rechtseindeutig, mithin Abbildungen.

Dies folgt für R_1 und entsprechend für R_2 sofort aus der Tatsache, dass für jedes $x \in \{1, 2, 3\}$ nur ein einziges Paar (x, y) aus der entsprechenden Relation existiert.

R_3 ist keine Abbildung.

Beweis:
Seien $(x, y) = (1, 1)$ und $(x, z) = (1, 3)$, d. h. Paare mit gleicher erster und ungleicher zweiter Komponente. Wäre R_3 rechtseindeutig, so müsste gelten $y = x$, d. h. $1 = 3$, was aber falsch ist. Also ist R_3 nicht rechtseindeutig, *w. z. b. w.*!

2. Wir sind aufgefordert, Mengen zu berechnen. Dies schließt ein, dass aus den Antworten auch die Berechnungsverfahren hervorgehen müssen.

Für die Berechnung der reflexiven und transitiven Hülle R^* einer Relation R stehen uns gegenwärtig nur die Formeln $R^* = R^+ \cup R^0$ mit $R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^n$ zur Verfügung.

Die Berechnung von R_1^+ bzw. R_2^+ bedeutet, dass für jedes der 9 Paare (x, y) mit $x, y \in \{1, 2, 3\}$ entschieden werden muß, ob ein Pfad innerhalb R_1 bzw. R_2 von x nach y führt, d. h., ob $z_0, z_1, \ldots, z_n$ existieren mit $x = z_0$, $y = z_n$ und $(z_i, z_{i+1}) \in R_1$ für alle i bzw. $(z_i, z_{i+1}) \in R_2$ für alle i.

$R_1^+ = R_1 \cup \{(2, 2), (3, 3)\}$:
Der Pfad $(2, 3, 2)$ führt innerhalb von R_1 von 2 nach 2. Also gilt $(2, 2) \in R_1^+$.
Der Pfad $(3, 2, 3)$ führt innerhalb von R_1 von 3 nach 3. Also gilt $(3, 3) \in R_1^+$.
Von 2 nach 1 gibt es keinen Pfad und von 3 nach 1 gibt es keinen Pfad.

Nun folgt $R_1^* = R_1^+ \cup \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} = \{(2, 3), (3, 2), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

$R_2^+ = R_2 \cup \{(1,3)\}$:
Der Pfad $(1,2,3)$ führt innerhalb von R_2 von 1 nach 3. Also gilt $(1,3) \in R_2^+$.
Von 1 nach 1 gibt es keinen Pfad und von 2 aus gibt es nur nach 3 einen Pfad.
Von 3 aus gibt es weder nach 1 noch nach 2 einen Pfad.

Nun folgt $R_2^* = R_2^+ \cup \{(1,1),(2,2),(3,3)\} = \{(1,2),(2,3),(1,3),(1,1),(2,2),(3,3)\}$.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $f : X \to Y$ eine beliebige Abbildung einer nicht-leeren Menge X in Y. Entscheiden Sie (mit Begründung), ob für beliebige Teilmengen $A_1, A_2 \subseteq X$ und $B_1, B_2 \subseteq Y$ stets gilt:

$$\begin{aligned} f(A_1 \backslash A_2) &\supseteq f(A_1) \setminus f(A_2)\,, \\ f^{-1}(B_1 \backslash B_2) &= f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)\,. \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag

1. Die Mengeninklusion $f(A_1 \backslash A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$ ist gültig. Sie ist gleichbedeutend mit der Subjunktion

$$y \in f(A_1) \setminus f(A_2) \quad \Longrightarrow \quad y \in f(A_1 \backslash A_2)\,,$$

die wie folgt bewiesen wird.

Beweis:
Sei $y \in f(A_1) \setminus f(A_2)$.
Dann gibt es ein $x \in A_1$ mit $y = f(x)$. Für ein solches x gilt aber $x \notin A_2$, also $x \in A_1 \setminus A_2$. Andernfalls wäre ja $y \in f(A_2)$ im Widerspruch zur Annahme.
Also folgt $y \in f(A_1 \backslash A_2)$, *w. z. b. w.*.

2. Die Mengengleichung $f^{-1}(B_1 \backslash B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$ ist gleichbedeutend mit der Äquivalenz

$$x \in f^{-1}(B_1 \setminus B_2) \quad \Longleftrightarrow \quad (x \in f^{-1}(B_1)) \ \wedge \ \neg(x \in f^{-1}(B_2))\,,$$

die wie folgt bewiesen wird.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \setminus B_2) &\Longleftrightarrow f(x) \in B_1 \setminus B_2 \\ &\Longleftrightarrow (f(x) \in B_1) \ \wedge \ \neg(f(x) \in B_2) \\ &\Longleftrightarrow (x \in f^{-1}(B_1)) \ \wedge \ \neg(x \in f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Komposition $\circ$ zweier Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ gilt: Ist $g \circ f$ bijektiv, dann ist f injektiv und g surjektiv.

Lösungsvorschlag

Wir setzen die Bijektivität, d. h. Injektivität und Surjektivität von $g \circ f$ voraus und erhalten zunächst für alle $x, y \in A$

$$f(x) = f(y) \;\Rightarrow\; g(f(x)) = g(f(y)) \;\Rightarrow\; (g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \;\Rightarrow\; x = y.$$

Daraus folgt die Injektivität von f, gewonnen aus der Injektivität von $g \circ f$. Die Surjektivität von g gewinnen wir aus der Surjektivität von $g \circ f$ wie folgt.
Sei $y \in C$. Wir müssen ein $x \in B$ finden, so dass $g(x) = y$.
Nun ist aber $g \circ f$ surjektiv, d. h. es gibt ein z mit $y = (g \circ f)(z)$. Wir setzen $x = f(z)$ und haben somit ein geeignetes $x \in B$ gefunden, denn es gilt $g(x) = g(f(z)) = y$.

Hinweis: *Die im Folgenden als* Vorbereitung *bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.*

Vorbereitung 1

Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen dem Begriff der Äquivalenzrelation und dem Begriff einer Partition.

Ist die leere Relation eine Äquivalenzrelation? Gibt es demnach eine Partition der leeren Menge?

Lösungsvorschlag

Eine Äquivalenzrelation R über einer Menge M ist eine reflexive, symmetrische und transitive Relation $R \subseteq M \times M$. Eine Partition P dagegen ist eine Menge von Teilmengen K von M, die wir in diesem Zusammenhang als Äquivalenzklassen bezeichnen, also $P \subseteq \mathcal{P}(M)$. Die Klassen aus P müssen aber paarweise disjunkt sein und für jedes Element x von M muß es eine Klasse K geben, in der x enthalten ist, d. h. $x \in K$.
Die Menge der Partitionen über M entspricht eineindeutig der Menge der Äquivalenzrelationen über M. Die Zuordnung wird definiert durch die Festlegung, dass eine Klasse K, in der ein Element x enthalten ist, genau diejenigen Elemente von M enthält, die zu x in Relation stehen.
Falls $M = \emptyset$, dann ist $R = \emptyset \subseteq \emptyset \times \emptyset$ trivialerweise eine Äquivalenzrelation. Als Partition P reicht die leere Menge von Klassen über M aus, also $P = \emptyset \subseteq \mathcal{P}(M)$. Es gibt also eine leere Partition, nämlich dann, wenn M selbst leer ist.

Vorbereitung 2

Sei $M = \{1, 2, 3\}$.

1. Bestimmen Sie alle transitiven Relationen $R \subseteq M \times M$!
2. Bestimmen Sie alle partiellen Ordnungen $S \subseteq M \times M$ über M! Welche davon sind total?
3. Bestimmen Sie alle Äquivalenzrelationen $T \subseteq M \times M$ über M!

Lösungsvorschlag

Über der 3-elementigen Menge $M = \{1,2,3\}$ gibt es immerhin schon 512 Relationen $R \subseteq M \times M$. Man könnte daran denken, alle diese Relationen aufzulisten und einzeln zu prüfen, welche der unten genannten Eigenschaften zutreffen. Die Liste könnte bei der leeren Relation $R = \emptyset$ beginnen, die transitiv ist, aber weder eine partielle Ordnung über M noch eine Äquivalenrelation über M darstellt.

Diesen aufwändigen Weg wollen wir nicht gehen. Wir werden versuchen, den Aufwand zur Darstellung der Lösung durch Strukturierung zu reduzieren. Eine zentrale Rolle spielt hier das Hasse-Diagramm einer transitiven Relation einerseits und die Darstellung des symmetrischen Teils der Relation durch Symmetrieklassen oder Äquivalenzklassen andererseits.

Zur Erinnerung: R ist genau dann transitiv, falls gilt

$$\forall x,y,z \in M: \; (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \;\Rightarrow\; (x,z) \in R\,.$$

Sei $R \subseteq M \times M$ transitiv. Dann heißt $H \subseteq R$ ein Hasse-Diagramm zu R, falls H eine minimale Menge ist, so dass $H^+ = R$ gilt. Wir definieren den symmetrischen Teil R_{sym} von R als

$$R_{sym} = \{(x,y) \mid (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R\}\,.$$

R_{sym} ist transitiv und symmetrisch. Transitive und symmetrische Relationen $S \subseteq M$ stellt man nicht durch eine Auflistung der Menge dar, sondern besser durch Angabe von Klassen $[x] = \{y \in M \mid (x,y) \in S\}$. Diese Klassen sind paarweise disjunkt und sind genau dann nicht-leer, wenn $(x,x) \in S$. Für reflexive Relationen bilden diese Klassen eine Partition der Menge M.

Bemerkenswerterweise ist $R \setminus R_{sym}$ ebenfalls transitiv und aber asymmetrisch, d. h. es gilt $\forall x,y \in M : (x,y) \in R \setminus R_{sym} \Rightarrow (y,x) \notin R \setminus R_{sym}$.

$R \setminus R_{sym}$ kann natürlich durch ein Hasse-Diagramm dargestellt werden. Es gibt nun aber die Möglichkeit, den Darstellungsaufwand weiter zu reduzieren. Wir nennen eine Relation $G \subseteq R$ zusammen mit der Relation R_{sym} ein HM-Diagramm zu R, falls G eine minimale Menge ist, so dass $(G \cup R_{sym})^+ = R$ gilt.

1. Wir konstruieren zunächst alle symmetrischen und transitiven Relationen über der 3-elementigen Menge M durch Auflistung aller Partitionen von Teilmengen A von M. Dazu erweitern wir die Schreibweise der Partitionen geringfügig und fügen der Partition jeweils die Elemente hinzu, die von den Klassen nicht überdeckt werden. Die erweiterten Mengen nennen wir erweiterte Partitionen.

$$\left|\begin{array}{lll}
P_1 = \{1,2,3\}, & & \\
P_2 = \{\{1\},2,3\}, & P_3 = \{1,\{2\},3\}, & P_4 = \{1,2,\{3\}\}, \\
P_5 = \{1,\{2\},\{3\}\}, & P_6 = \{\{1\},2,\{3\}\}, & P_7 = \{\{1\},\{2\},3\}, \\
P_8 = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}, & & \\
P_9 = \{\{1,2\},3\}, & P_{10} = \{\{1,3\},2\}, & P_{11} = \{\{2,3\},1\}, \\
P_{12} = \{\{1,2\},\{3\}\}, & P_{13} = \{\{1,3\},\{2\}\}, & P_{14} = \{\{2,3\},\{1\}\}, \\
P_{15} = \{\{1,2,3\}\}. & &
\end{array}\right.$$

Man beachte, dass die erweiterten Partitionen P_1 bis P_8 jeweils 3 Elemente enthalten, P_9 bis P_{14} enthalten je 2 Elemente und P_{15} enthält 1 Element.

Im nächsten Schritt geben wir alle asymmetrischen (zyklenfreien) Hasse-Diagramme für 1, 2 oder 3 Elemente an, um diese dann in einem 3. Schritt mit den erweiterten Partitionen P_i zu kombinieren.

3 Elemente $\{a, b, c\}$:

$$\left|\begin{array}{lll} H_1 = \{\}, & & \\ H_2 = \{(a,b)\}, & H_3 = \{(a,c)\}, & H_4 = \{(b,c)\}, \\ H_5 = \{(b,c)\}, & H_6 = \{(c,a)\}, & H_7 = \{(c,b)\}, \\ H_8 = \{(a,b),(a,c)\}, & H_9 = \{(b,a),(b,c)\}, & H_{10} = \{(c,a),(c,b)\}, \\ H_{11} = \{(b,a),(c,a)\}, & H_{12} = \{(a,b),(c,b)\}, & H_{13} = \{(a,c),(b,c)\}, \\ H_{14} = \{(a,b),(b,c)\}, & H_{15} = \{(a,c),(c,b)\}, & \\ H_{16} = \{(b,a),(a,c)\}, & H_{17} = \{(b,c),(c,a)\}, & \\ H_{18} = \{(c,a),(a,b)\}, & H_{19} = \{(c,b),(b,a)\}. & \end{array}\right.$$

2 Elemente $\{a, b\}$:

$$\left|\begin{array}{ll} H_{20} = \{\}, & \\ H_{21} = \{(a,b)\}, & H_{22} = \{(b,a)\}. \end{array}\right.$$

1 Element $\{a\}$:

$$\left|\ H_{23} = \{\}.\right.$$

Im 3. Schritt werden nun die erweiterten Partitionen mit den Hasse-Diagrammen für die entsprechende Elementzahl kombiniert und stellen alle transitiven Relationen als HM-Diagramme dar.

2. Partielle Ordnungen S über M sind reflexiv über M, antisymmetrisch und transitiv. Also können diese Ordnungen alle aus P_8 in Kombination mit den HM-Diagrammen H_1 bis H_{19}. gewonnen werden.

   Die erhaltenen Ordnungen sind total genau dann, wenn sie mit H_{14}, H_{15}, H_{16}, H_{17}, H_{18} oder H_{19} konstruiert wurden.

3. Die erweiterten Partitionen, die ganz M überdecken, entsprechen genau allen Äquivalenzrelationen über M. Dies sind also P_8, P_{12}, P_{13}, P_{14} und P_{15}. Kombinieren kann man diese Partitionen natürlich mit H_1, H_{20} und H_{23}.

Vorbereitung 3

Für reellwertige Funktionen $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ ist die Menge $o(g(n))$ aller Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, die ein *kleineres Wachstum* besitzen als g, wie folgt definiert:

$$f(n) \in o(g(n)) \quad :\Longleftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0)[|f(n)| < \varepsilon \cdot g(n)]\,.$$

Ein bedeutender Spezialfall dieser Definition ist unter anderer Bezeichnung bekannt. Eine reellwertige Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ hat für gegen ∞ strebendes n den Grenzwert 0, i. Z.

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0 \quad :\Longleftrightarrow \quad f(n) \in o(1),$$

wobei 1 hier die konstante Funktion bedeutet, die für alle n den Wert 1 besitzt.

Man zeige unter sorgfältiger Beachtung der Definitionen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,.$$

Lösungsvorschlag

Wir haben also zu zeigen

$$(\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0)[\frac{1}{n} < \varepsilon \cdot 1].$$

Die hier anzuwendende Beweistechnik ist außerordentlich wichtig. Sie besteht in der schrittweisen Erfüllung des obigen prädikatenlogischen Ausdrucks von "links nach rechts" gemäß der Klammerung

$$(\forall \varepsilon > 0)\ [(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ [(\forall n \geq n_0)[\frac{1}{n} < \varepsilon \cdot 1]]].$$

Zunächst ist die Behauptung zu betrachten, dass für alle $\varepsilon > 0$ etwas bestimmtes gilt, nämlich

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ [(\forall n \geq n_0)[\frac{1}{n} < \varepsilon \cdot 1]].$$

Deshalb nehmen wir zunächst ein beliebiges $\varepsilon > 0$ an und wollen zeigen, dass es ein n_0 (in Abhängigkeit von ε) gibt, so dass gilt

$$(\forall n \geq n_0)[\frac{1}{n} < \varepsilon \cdot 1].$$

Existenzbeweise werden häufig konstruktiv geführt. Wir konstruieren also ein geeignetes n_0 wie folgt:

$$n_0 := \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 17.$$

Nun zeigen wir, dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \cdot 1.$$

Wieder nehmen wir ein beliebiges n mit $n \geq n_0$ an. Es gilt $n \geq n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 17$, und deshalb $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Es folgt

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \cdot 1.$$

Damit sind wir mit dem Beweis fertig.

Warum haben wir 17 gewählt? Tatsächlich hätten wir auch jede andere positive Zahl wählen können, die die Herleitung von $\frac{1}{n} < \varepsilon$ gestattet.

Vorbereitung 4

Machen Sie sich mit den Eigenschaften der Logarithmusfunktion ausreichend vertraut, um Folgendes zu zeigen:

$\log_{10} 3$ ist keine rationale Zahl, d. h., ist nicht als Bruch ganzer Zahlen darstellbar.

Hinweis: Eine der grundlegendsten Operationen der Analysis und Funktionentheorie ist die Bildung der Potenz p^q. Die daraus abgeleitete Funktion x^a nennt man Potenzfunktion, und die Funktion a^x Exponentialfunktion mit dem Spezialfall e^x. Die Umkehrung von a^x führt auf die Logarithmusfunktion $\log_a x$.

Wir erinnern an folgende Schreibweisen der logarithmischen Funktionen. Allgemein wird der Logarithmus einer Zahl x zur Basis b mit $\log_b x$ bezeichnet. Soll eine Aussage für beliebige Basen gelten, so schreibt man häufig $\log x$. Die wichtige Formel für die Umrechnung verschiedener Basen lautet dann

$$\log_b x = \frac{\log x}{\log b} .$$

Für $b = e$ bzw. $b = 10$ bzw. $b = 2$ schreiben wir $\ln x$ bzw. $\lg x$ bzw. $\operatorname{ld} x$.

Lösungsvorschlag

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen für irgendwelche $m, n \in \mathbb{N}$ an, dass gilt

$$\log_{10} 3 = \frac{m}{n}.$$

Nach Definition des Logarithmus gilt dann

$$10^{\frac{m}{n}} = 3,$$

mithin

$$10^m = 3^n.$$

Da jede natürliche Zahl eine eindeutige Primfaktorzerlegung besitzt, und 3 kein Teiler von 10 ist, so ist diese Gleichung falsch für alle m und n. Damit ist die Annahme falsch, *w. z. b. w.* .

Tutoraufgabe 1

Sei R eine binäre Relation.

1. Zeigen Sie, dass $\bigcup_{n\geq 1} R^n$ transitiv ist!
2. Sei $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $R = \{(x, y) \mid y = x + 3\}$. Berechnen Sie R^* !

Lösungsvorschlag

1. Seien $(x, y), (y, z) \in \bigcup_{n\geq 1} R^n$. Wir haben zu zeigen, dass dann auch $(x, z) \in \bigcup_{n\geq 1} R^n$ gilt:

   Zunächst gibt es $k, l \geq 1$ mit $(x, y) \in R^k$ und $(y, z) \in R^l$. Aus der Definition der Komposition von Relationen folgt, dass es Elemente $x = x_0, x_1, \ldots, x_k = y$ und $y = y_0, y_1, \ldots, y_l = z$ gibt mit

   $$x = x_0 R x_1 R \ldots R x_{k-1} R x_k = y \quad \wedge \quad y = y_0 R y_1 R \ldots R y_{k-1} R y_l = z .$$

   Durch Verkettung folgt

   $$x = x_0 R x_1 R \ldots R x_{k-1} R y_0 R y_1 R \ldots R y_{k-1} R y_l = z .$$

   D. h. $(x, z) \in R^{k+l} \subseteq \bigcup_{n\geq 1} R^n$, *w.z.b.w.* .

2. Es gilt

$$\begin{aligned} R^n &= \{(x,y) \mid y = x + 3n\}\,, \\ R^* &= \bigcup_{n \geq 0} R^n \\ &= \{(x,y) \mid \exists n \geq 0 : y = x + 3n\} \\ &= \{(x,y) \mid y \geq x \text{ und } 3|(y-x)\}\,. \end{aligned}$$

Tutoraufgabe 2

Wir nehmen Bezug auf die Vorbereitungsaufgabe 3. Sei $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion. Zeigen Sie:

1. Falls f nur endlich viele Nullstellen besitzt, dann gilt

$$g(n) \in o(|f(n)|) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \left| \frac{g(n)}{f(n)} \right| = 0\,.$$

2. $f(n) \notin o(|f(n)|)$.

Lösungsvorschlag

1. Wenn f nur endlich viele Nullstellen besitzt, dann können wir ein α annehmen, so dass $f(n) \neq 0$ für alle $n \geq \alpha$. Es gilt

$$\begin{aligned} g(n) \in o(|f(n)|) \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0)[|g(n)| < \varepsilon \cdot |f(n)|] \\ &\Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq \max\{n_0, \alpha\}\,)[|g(n)| < \varepsilon \cdot |f(n)|] \\ &\Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq \max\{n_0, \alpha\}\,)[\frac{|g(n)|}{|f(n)|} < \varepsilon \cdot 1] \\ &\Leftrightarrow \quad \left| \frac{g(n)}{f(n)} \right| \in o(1) \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \left| \frac{g(n)}{f(n)} \right| = 0\,. \end{aligned}$$

Streng genommen wurden hier implizit die Definitionen auf "partiell definierte" Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ erweitert, die aber höchstens für endlich viele Stellen $n \in \mathbb{N}_0$ nicht definiert sind. Die Funktion $\left|\frac{g(n)}{f(n)}\right|$ ist eine solche Funktion. Die Definitionen gelten wortwörtlich auch für diese Funktionen.

2. Wir nehmen an, dass gilt $f(n) \in o(|f(n)|)$.
Mit Teilaufgabe 1 folgt $\lim_{n \to \infty} \left|\frac{f(n)}{f(n)}\right| = 0$. Dies ist aber ein Widerspruch zu

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{f(n)}{f(n)} \right| = \lim_{n \to \infty} 1 = 1\,.$$

Tutoraufgabe 3

Ordnen Sie die folgenden Funktionen nach ihrem Wachstumsverhalten, also so, dass für zwei in der Anordnung aufeinander folgende Funktionen f und g gilt: $f(n) \in o(g(n))$. Beweisen Sie Ihre Anordnung.

$$f_1(n) = 2^n\,, \qquad f_2(n) = \sqrt{n}\,,$$
$$f_3(n) = n\,, \qquad f_4(n) = (\log n)^2\,.$$

Lösungsvorschlag

Die Anordnung nach fallendem Wachstum ist (f_1, f_3, f_2, f_4).

(1) Es gilt $f_3 \in o(f_1(n))$.

Man zeigt mit Induktion für alle $n \geq 4$

$$2^n \geq n^2.$$

Daraus folgt

$$\frac{n}{2^n} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}. \tag{1}$$

Nun folgt aus $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ wegen (1) auch $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$, d. h. $f_3 \in o(f_1(n))$, denn es gilt ganz allgemein:

> Wenn $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$ und $|g(n)| \leq |f(n)|$ für alle $n \geq n'$ gilt, wobei $n' \in \mathbb{N}$ sei, dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} g(n) = 0$.

Zum Beweis nehmen wir $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$ und $|g(n)| \leq |f(n)|$ an für alle $n \geq n'$ mit einem bestimmten n'. Wir zeigen $\lim_{n\to\infty} g(n) = 0$, d. h.

$$(\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0)\,[|g(n)| < \varepsilon]\,.$$

Dazu sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$ gibt es ein n_0', so dass für alle $n \geq n_0'$ gilt $|f(n)| < \varepsilon$. Für $n \geq n_0 := \max\{n', n_0'\}$ gilt dann $|g(n)| \leq |f(n)| < \varepsilon$, w. z. b. w. .

(2) Es gilt $f_2 \in o(f_3(n))$.

Dies folgt aus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

(3) Es gilt $f_4 \in o(f_2(n))$.

Sei nun b eine beliebige Basis. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{(\log_b n)^2}{\sqrt{n}} &= \lim_{k\to\infty} \frac{(\log_b 2^{2k})^2}{\sqrt{2^{2k}}} \\
&= \left(\frac{4}{\operatorname{ld} b}\right)^2 \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{2^k} \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Die erste Gleichung erhält man durch Übergang von der Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf ihre Teilfolge $(2^{2k})_{k\in\mathbb{N}}$. Die Gleichheit der entsprechenden Limiten gilt für monotone Funktionen im Zähler und Nenner. Die letzte Gleichung führt man auf die Ungleichung $2^n \geq n^3$ für alle $n \geq 10$ zurück, analog wie in Teilaufgabe (1).