Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 15
Computergraphik & Visualisierung
Prof. Dr. Rüdiger Westermann
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2007/08
Lösungsblatt 5
28. November 2007

Diskrete Strukturen

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Die Fibonacci-Folge $(f_0, f_1, \dots)$ ist definiert durch:

$$f_0 = 0\,, \quad f_1 = 1\,, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \forall n \geq 2\,.$$

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 0$ gilt

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)\,.$$

Hinweis: Es gilt $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Lösungsvorschlag

Bei dieser Aufgabe müssen wir den Induktionsschluss so modifizieren, dass wir den Nachweis der Gültigkeit obiger Gleichung für $n+1$ auf die Gültigkeit der Gleichung für n und zusätzlich $n-1$ stützen können.
Dazu machen wir eine Einbettung der zu beweisenden Gleichung, indem wir für alle $n \geq 0$ die Eigenschaft $P(n)$ definieren als die Gültigkeit obiger Gleichung für alle m, für die $0 \leq m \leq n$ gilt.

Behauptung: Es gilt $P(n)$ für alle $n \geq 0$.

Induktionsanfang: Es gilt $P(0)$ und $P(1)$. Beweis:

- $n = 0$ $\qquad f_0 = 0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right)$.
- $n = 1$ $\qquad f_1 = 1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right)$.

Annahme: Es gelte $P(n)$ für irgendein n mit $n \geq 1$.

Induktionsschluss: Es gilt dann auch $P(n+1)$. Beweis:

$$\begin{aligned}
f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) + f_{n-1} && \text{(IA. für n)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right) && \text{(IA. für n-1)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right) \qquad \text{(siehe Hinweis)}\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).
\end{aligned}
$$

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $M = \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid x+y \geq 17\}$. Wir definieren eine binäre Relation R über M wie folgt.

$$((x,y),(x',y')) \in R \;:\Leftrightarrow\; x \leq x' \wedge y \leq y'\,.$$

1. Zeigen Sie, dass R eine partielle Ordnung über M ist!
2. Ein Element $x \in M$ heißt minimal bezüglich R, wenn es kein Element $y \in M$ gibt mit $y \neq x$ und $(y,x) \in R$. Wie viele minimale Elemente bezüglich R gibt es?

Lösungsvorschlag

Wir benützen die Tatsache, dass die Relation $\leq$ für natürliche Zahlen eine totale Ordnung ist. Da R eine Relation über M sein soll, gilt $R \subseteq M \times M$.

1. Reflexivität über M:
   Sei $(x,y) \in M\times M$. Wegen $x \leq x$ und $y \leq y$ folgt nach Definition $((x,y),(x,y)) \in R$.

   Antisymmetrie:
   Seien $p = (x_1,y_1)$ und $q = (x_2,y_2)$. Sei $(p,q) \in R$ und gleichzeitig $(q,p) \in R$.
   Aus $(p,q) \in R$ folgt einerseits $x_1 \leq x_2$ und $y_1 \leq y_2$.
   Aus $(q,p) \in R$ folgt aber gleichzeitig $x_2 \leq x_1$ und $y_2 \leq y_1$.
   Daraus folgt $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$, was gleichbedeutend ist mit $p = q$, *w.z.b.w.*.

   Transitivität:
   Seien $p = (x_1,y_1)$, $q = (x_2,y_2)$ und $r = (x_3,y_3)$, und seien $(p,q) \in R$ und $(q,r) \in R$.
   Wir weisen nach, dass nun $(p,r) \in R$ folgt.
   Aus $(p,q) \in R$ folgt $x_1 \leq x_2$ und $y_1 \leq y_2$.
   Aus $(q,r) \in R$ folgt $x_2 \leq x_3$ und $y_2 \leq y_3$.
   Die Transitivität von $\leq$ liefert nun $x_1 \leq x_3$ und $y_1 \leq y_3$. Daraus folgt aber nach Definition von R sofort $(p,r) \in R$. *W.z.b.w.*.

2. Die Menge der minimalen Elemente von M bezüglich R wollen wir M_{min} nennen. Es gilt

   $$\begin{aligned} M_{min} &= \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid x+y = 17\} \\ &= \{(1,16),(2,15),\ldots,(16,1)\}\,. \end{aligned}$$

   Offensichtlich gilt $|M_{min}| = 16$.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

1. Für die reellwertigen Funktionen $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit $f(n) = 2^n$ und $g(n) = n^2$ gilt bekanntlich $f(n) \notin o(g(n))$, d. h. $(\exists c > 0\, \forall n_0 \in \mathbb{N}_0\, \exists n \geq n_0)\, [|f(n)| \geq c \cdot g(n)]$.

   Beweisen Sie diese Eigenschaft, indem Sie für $c = 5$ die folgende Aussage nachweisen:

$$(\forall n_0 \in \mathbb{N}_0\, \exists n \geq n_0)\, [2^n \geq 5 \cdot n^2]\,.$$

2. Geben Sie Funktionen $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ an, für die gilt

$$f(n) \notin o(|g(n)|) \quad \text{und} \quad g(n) \notin O(|f(n)|)\,.$$

Lösungsvorschlag

1. Sei $n_0 \in \mathbb{N}_0$ beliebig gegeben. Für $n' = 10$ gilt

$$\tfrac{2^{n'}}{n'^2} = \tfrac{2^{10}}{10^2} = \tfrac{1024}{100} \geq 5.$$

   Sei nun $n = \max\{n', n_0\}$. Dann gilt wegen Monotonie

$$\tfrac{2^n}{n^2} \geq \tfrac{2^{n'}}{n'^2} \geq 5.$$

2. Wir definieren z. B.

$$f(n) = \begin{cases} n & : \ n \ \text{gerade} \\ 0 & : \ n \ \text{ungerade} \end{cases}, \qquad g(n) = \begin{cases} 0 & : \ n \ \text{gerade} \\ n & : \ n \ \text{ungerade} \end{cases}.$$

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Die Menge der injektiven Abbildungen einer Menge M in eine Menge N bezeichnen wir mit $Inj(M, N)$. Seien M und N endliche Mengen mit $|M| \leq |N|$.

1. Seien $x \in M$ und $y \in N$. Zeigen Sie die Gültigkeit der Gleichung

$$|Inj(M, N)| \; = \; |N| \cdot |Inj(M \backslash \{x\}, N \backslash \{y\})|\,.$$

2. Die Anzahl der Elemente in M bzw. N sei m bzw. n. Zeigen Sie, dass die Anzahl aller injektiven Abbildungen von M nach N gegeben ist durch

$$n^{\underline{m}} := \prod_{i=1}^{m} (n - i + 1).$$

   Hinweis: Mit $\prod_{i=1}^{m}(n - i + 1)$ wird das Produkt aller m Faktoren $(n - i + 1)$ von $i = 1$ bis $i = m$ bezeichnet. Beachten Sie, dass für $m = 0$ das "leere" Produkt mit dem Wert 1 definiert ist.

Lösungsvorschlag

1. Das Element x bestimmt eine Äquivalenzrelation über $Inj(M,N)$, indem wir zwei injektive Abbildungen f und g von M nach N als äquivalent erklären, falls $f(x)=g(x)$. Zu jedem $y \in N$ gibt es dann eine nichtleere Äquivalenzklasse $P_{x,y}$ von injektiven Abbildungen f mit $f(x)=y$. D. h., $P_{x,y}$ ist die Menge aller injektiven Abbildungen f von M in N mit $f(x)=y$. Die Menge aller Klassen $P_x = \{P_{x,y} \,|\, y \in N\}$ ist eine Partition der Menge $Inj(M,N)$ mit $|N|$ Klassen. Alle Klassen sind gleich groß,
$$\forall y_1, y_2 \in N : |P_{x,y_1}| = |P_{x,y_2}|\,.$$
Offenbar lassen sich die Abbildungen $f \in Inj(M\setminus\{x\}, N\setminus\{y\})$ eindeutig den Abbildungen aus $P_{x,y}$ zuordnen, denn jedes f braucht ja nur zusätzlich an der Stelle x durch $f(x)=y$ definiert zu werden. Es folgt
$$|Inj(M,N)| = |N| \cdot |Inj(M\setminus\{x\}, N\setminus\{y\})|\,.$$

2. Zu beweisen ist also $|Inj(M,N)| = n^{\underline{m}}$ für alle n,m mit $0 \le m \le n$. Wir führen den Beweis durch Induktion über m. Dann ist für jedes m die Aussage
$$P(m) := \quad (\forall n \ge m : \ |Inj(M,N)| = n^{\underline{m}})$$
zu beweisen, wobei wir stets $m=|M|$ und $n=|N|$ voraussetzen wollen.

   Behauptung: Es gilt $P(m)$ für alle $m \ge 0$.

   Induktionsanfang: Es gilt $P(0)$. Beweis:

   $m=0$ ist gleichbedeutend mit $M=\emptyset$. Es gilt definitionsgemäss für alle $n \ge 0$
$$n^{\underline{0}} = \prod_{i=1}^{0}(n-i+1) = 1.$$
   Wieviele injektive Abbildungen $f : \emptyset \to N$ gibt es? Antwort: Genau Eine!

   Bemerkung: Zunächst muss man sich erinnern, dass jede Abbildung als eine Relation definiert wurde. Die einzige Relation, die alle geforderten Bedingungen erfüllt, ist die leere Relation $f=\emptyset$, d. h. die leere Menge von Paaren $(x,y) \in \emptyset \times N$. Beachten Sie hier, dass natürlich $\emptyset \times N = \emptyset$ gilt, und damit $f \subseteq \emptyset \times N$ sofort $f=\emptyset$ impliziert. Wenn die Urbildmenge also leer ist, dann gibt es als einzige Abbildung der Urbildmenge die leere Abbildung. Diese ist trivialerweise injektiv, d. h. es werden offensichtlich nie zwei verschiedene Elemente in einen einzigen Wert abgebildet.

   Damit ist die Behauptung für den Fall $m=0$ gezeigt.

   Annahme: Es gilt $P(m)$ für irgendein $m \ge 0$.

   Induktionsschluss: Dann gilt auch $P(m+1)$. Beweis:

   Sei also M eine m-elementige Menge und $x \notin M$.
   Sei N eine beliebige Menge mit $n=|N| \ge m+1$ und sei $y \in N$.
$$\begin{aligned} |Inj(M\cup\{x\},N)| &= |N| \cdot |Inj(M, N\setminus\{y\})| && \text{(Teilaufg. 1)} \\ &= n\cdot(n-1)^{\underline{m}} && \text{(I.Ann.)} \\ &= n^{\underline{m+1}}\,. \end{aligned}$$
   Damit ist der Induktionsschluss bewiesen.

Hausaufgabe 5 (0 Punkte)

Wir bitten um Beantwortung der folgenden Fragen zum Stoff der DS Vorlesung in den Grundlagenabschnitten Logik, Beweise, Mengen und Relationen.

1. War der Stoff
   (a) aus der Schulzeit weitgehend bekannt?
   (b) aus der Schulzeit kaum bekannt?
2. War der Mathematik-Vorkurs zur Vorbereitung der Vorlesungsinhalte
   (a) geeignet?
   (b) nicht geeignet?
3. Sollte der Stoff zukünftig
   (a) gestrafft behandelt werden?
   (b) ausführlicher behandelt werden?
   (c) wieder in gleicher Weise behandelt werden?
4. Sie sind natürlich ausdrücklich ermuntert, Ihren freien Kommentar zu den Fragen abzugeben.

Vielen Dank!

***Hinweis:** Die im Folgenden als* Vorbereitung *bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.*

Vorbereitung 1

Sei M eine nicht leere, endliche Menge und $f : M \to M$ eine bijektive Abbildung. Eine nicht leere Teilmenge S von M nennen wir *stabil (unter f)*, wenn $f(S) \subseteq S$ gilt. Eine stabile Menge S nennen wir einen Zyklus, wenn S keine unter f stabile echte Teilmenge enthält.
Zeigen Sie, dass eine bijektive Abbildung $f : M \to M$ die Menge M in Zyklen partitioniert.

Lösungsvorschlag

Wir definieren P als die Menge aller Zyklen bezüglich f,

$$P = \{S \subseteq M \mid S \text{ Zyklus bezüglich } f\},$$

und weisen nach, dass P eine Partition über M ist.
Wir definieren zunächst den von einem Element $x \in M$ erzeugten Zyklus S_x wie folgt.
Sei $x \in M$. Dann definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ die n-fache Anwendung $f^n(x)$ von f auf x rekursiv durch $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$, wobei $f^0(x) = x$ sei. Dann ist aber $S_x = \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ ein Zyklus.
1. Wir weisen nun durch Widerspruch nach, dass zwei (verschiedene) Zyklen S_1 und S_2 notwendig disjunkt sind.
Gäbe es ein x mit $x \in S_1 \cap S_2$, dann würde folgen $S_x \subseteq S_1 \cap S_2$. Da sowohl S_1 als auch S_2 keinen echten Zyklus enthalten kann, müßte gelten $S_x = S_1 = S_2$, im Widerspruch zur Annahme, dass S_1 und S_2 verschiedene Zyklen sind.
2. Offensichtlich überdeckt P die Menge M, denn jedes Element $x \in M$ ist mindesten in dem Zyklus S_x enthalten.

Vorbereitung 2

Bei bestimmten Mannschaftsweltmeisterschaften treten in einer Gruppe vier Mannschaften paarweise gegeneinander an, so dass jede Mannschaft genau einmal gegen jede andere spielt. Die Siegermannschaft erhält jeweils drei Punkte, die Verlierer null Punkte. Bei einem Unentschieden bekommen beide Mannschaften einen Punkt. Der Tabellenstand ergibt sich aus den summierten Punkten. Nur die erst- oder zweitplazierten Mannschaften können vorrücken. Lösen Sie die folgenden Teilaufgaben, um zu ermitteln, wie viele Punkte eine Mannschaft mindestens haben muß, um vorzurücken.

1. Zu wie vielen Spielen kommt es in einer Gruppe mit n Mannschaften mindestens?
2. Wie viele Punkte hat der Gruppensieger in einer Gruppe mit n Mannschaften mindestens?
3. Wie viele Punkte hat der Gruppenzweite mindestens?

Lösungsvorschlag

1. Die Gesamtzahl der Spiele sei s. Die erste Mannschaft spielt gegen $n-1$ Gegner, die zweite zusätzlich gegen $n-2$ Gegner, usw.. Es folgt
$$s = \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}\,.$$

2. In jeder Partie werden mindestens zwei Punkte (bei Unentschieden) vergeben. Es werden also insgesamt mindestens $P = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$ Punkte auf n Mannschaften verteilt. Dies entspricht einer Abbildung $f : [P] \to [n]$. Nach dem verallgemeinerten Schubfachprinzip gibt es mindestens eine Mannschaft, die $\lceil \frac{P}{n} \rceil = n-1$ Punkte erhalten hat.

3. Der Gruppenzweite hat am wenigsten Punkte, wenn der Erste alle Spiele gewinnt. Es werden also mindestens $2 \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Punkte auf $n-1$ Mannschaften verteilt. Die zweitplazierte Mannschaft hat also mindestens $n-2$ Punkte.

Es ergibt sich, dass man mindestens zwei Punkte (also zwei Unentschieden und eine Niederlage) benötigt, um bei einer solchen Mannschaftsweltmeisterschaft das Achtelfinale zu erreichen.

Tutoraufgabe 1

Zeigen Sie:

$$2^{100} \cdot n^2 \in O(n^2)\,, \qquad e^n \in \omega(2^n)\,,$$
$$2^{\sqrt{2\ln n}} \in o(n)\,, \qquad (\ln n)^{\ln n} \in \Theta(n^{\ln\ln n})\,.$$

Lösungsvorschlag

1. Es gilt
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{100}\,n^2}{n^2} = 2^{100} \,<\, \infty\,.$$

2. Es gilt
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n = 0\,.$$
Es folgt $2^n \in o(e^n)$, d. h., $e^n \in \omega(2^n)$.

3. Es gilt
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\sqrt{2\ln n}}}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{\ln n}}}{(e^{\sqrt{\ln n}})^{\sqrt{\ln n}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{\sqrt{2}}}{e^{\sqrt{\ln n}}}\right)^{\sqrt{\ln n}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2^{\sqrt{2}}}{e^x}\right)^x = 0\,.\end{aligned}$$

4. Aus
$$(e^{\ln n})^{\ln \ln n} = (e^{\ln \ln n})^{\ln n}$$
folgt sofort
$$n^{\ln \ln n} = (\ln n)^{\ln n}.$$
Beide Funktionen haben also trivialerweise gleiches Wachstum.

Tutoraufgabe 2

Sei $A \subseteq \{1, 2, \ldots, 2n\} \subset \mathbb{N}$ mit $|A| = n + 1$.

1. Zeigen Sie, dass es zwei Zahlen in A gibt, deren Summe $2n + 1$ beträgt.

2. Zeigen Sie, dass es zwei Zahlen in A gibt, so dass eine davon die andere teilt.

Lösungsvorschlag

1. Wir beweisen die Aussage mit dem einfachen Schubfachprinzip, wonach $n+1$ (oder mehr) Gegenstände auf n Schubfächer nur so verteilt werden können, dass in (mindestens) einem Schubfach 2 (oder mehr) der verteilten Gegenstände zu liegen kommen.

   Die eigentliche Beweisidee ist nun, die Menge $[2n]$ in Paarmengen $\{x, y\}$ so aufzuteilen (zu partitionieren), dass stets $x+y = 2n+1$ gilt. Diese Paarmengen sind unsere "Schubfächer". Sei also
$$Y := \{\{x, y\} \mid x, y \in [2n], x + y = 2n + 1\}.$$
   Wir definieren eine Abbildung $f : A \to Y$ durch
$$f(x) := \{x, (2n + 1 - x)\} \in Y.$$
   Es gilt $|Y| = n$ und $|A| = n + 1$.
   Nach dem genannten Schubfachprinzip gibt es ein (Schubfach) $y \in Y$ mit $|f^{-1}(y)| = 2$.
   Der 2-elementige Inhalt von y summiert sich zu $2n + 1$.

2. Wenn wir hier von 2 Zahlen sprechen, dann schließt dies ein, dass wir nicht den Fall betrachten müssen, dass eine Zahl Teiler von sich selbst ist. In diesem Fall wäre die Lösung trivial.

   Ein Beweis wurde in der Vorlesung vom 20.11.07 gegeben. Wir wiederholen bzw. detaillieren den Beweis wie folgt.

   Wir definieren den ungeraden Anteil $u(x)$ einer natürlichen Zahl x als größten ungeraden Teiler von x. Dann gilt $x = 2^k u(x)$ für ein $k \geq 0$. Die Bildung des ungeraden Anteils von Zahlen aus A definiert eine Abbildung von A auf $U = \{u(x) \mid x \in A\}$.

   Es gilt $|U| = n$. Wegen $|A| = n + 1$, gibt es nach dem Schubfachprinzip zwei Zahlen n_1, n_2 mit gleichem ungeraden Anteil. Daraus folgt, dass eine der beiden durch die andere teilbar ist. Die entsprechende Division ergibt eine Potenz von 2.

Tutoraufgabe 3

Beachten Sie im Folgenden, dass die angegebenen Mengen nicht disjunkt sind.
Seien $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{a, c, e, g, i, k, m\}$ und $C = \{e, f, g, h, i, j, k\}$.
Wie viele Elemente, d. h. Teilmengen, aus $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \cup \mathcal{P}(C)$ gibt es?

Lösungsvorschlag

$|\mathcal{P}(A)| = 2^6 = 64$, $|\mathcal{P}(B)| = 2^7 = 128$, $|\mathcal{P}(C)| = 2^7 = 128$.
Da die Mengen A, B und C nicht paarweise disjunkt sind, sind auch $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(B)$ und $\mathcal{P}(C)$ nicht paarweise disjunkt und wir können $|\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)\cup\mathcal{P}(C))|$ nicht als Summe der einzelnen Mächtigkeiten von $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(B)$, $\mathcal{P}(C)$ bestimmen. Wir müssen die Formel der sogenannten Inklusion/Exklusion benützen. Dazu ist es zunächst notwendig, die Mengen $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ und $A \cap B \cap C$ zu bestimmen.
$A \cap B = \{a, c, e\}$, $A \cap C = \{e, f\}$, $B \cap C = \{e, g, i, k\}$, $A \cap B \cap C = \{e\}$.
Außerdem müssen wir die Gleichung $\mathcal{P}(X \cap Y) = \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y)$ benützen.
Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \cup \mathcal{P}(C)| &= |\mathcal{P}(A)| + |\mathcal{P}(B)| + |\mathcal{P}(C)| \\
&\quad -|\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)| - |\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(C)| - |\mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C)| \\
&\quad +|\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C)| \\
&= |\mathcal{P}(A)| + |\mathcal{P}(B)| + |\mathcal{P}(C)| \\
&\quad -|\mathcal{P}(A \cap B)| - |\mathcal{P}(A \cap C)| - |\mathcal{P}(B \cap C)| \\
&\quad +|\mathcal{P}(A \cap B \cap C)| \\
&= 2^6 + 2^7 + 2^7 - 2^3 - 2^2 - 2^4 + 2^1 \\
&= 294\,.
\end{aligned}
$$