Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 15
Computergraphik & Visualisierung
Prof. Dr. Rüdiger Westermann
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2007/08
Lösungsblatt 6
5. Dezember 2007

Diskrete Strukturen

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $A \subseteq \{1, 2, \ldots, 6n\}$ mit $|A| = 2n + 1$. Zeigen Sie, dass es eine Zahl $x \in A$ gibt, die durch 2 oder durch 3 teilbar ist.

Lösungsvorschlag

Wir bestimmen die Menge X derjenigen Zahlen $x \in [6n]$, die weder durch 2 noch durch 3 teilbar sind. Es gilt

$$X = \{6k - 1 \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n\} \cup \{6k - 5 \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n\} \quad \text{und} \quad |X| = 2n\,.$$

Wegen $|A| = 2n + 1$ kann $A \subseteq X$ nicht gelten. Also muß A mindestens ein Element enthalten, das nicht in X liegt, d. h. durch 2 oder 3 teilbar ist.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $M = \{1, 2, \ldots, m\}$. Wir betrachten die Menge aller Relationen $R \subseteq M \times M$.

1. Wie viele der Relationen sind nicht Funktionen mit Definitionsbereich M?
2. Wie viele der Relationen sind bijektive Funktionen über M?
3. Wie viele der Relationen sind totale Ordnungen von M?
4. Welcher Zusammenhang besteht zwischen bijektiven Abbildungen, totalen Ordnungen und Permutationen von M?

Lösungsvorschlag

Es gilt $m = |M|$.

1. Dann gilt $|M \times M| = m^2$. Die Anzahl von Teilmengen R von $M \times M$, d. h. Relationen über M, ist demnach 2^{m^2}. Die Anzahl der Abbildungen von M in M ist m^m.

   Demnach sind $(2^{m^2} - m^m)$ Relationen über M keine Funktionen mit Definitionsbereich M.

2. Es gibt $m!$ bijektive Funktionen von M nach M.

3. Es gibt $m!$ totale Ordnungen über M.

4. Der Begriff der bijektiven Abbildung einer Menge M in M ist identisch mit dem Begriff der Permutation von M.

   Permutationen von M und totale Ordnungen von M kann man eineindeutig einander zuordnen. Das minimale Element einer totalen Ordnung definiert das Bild von 1 und allgemein definiert das k-kleinste Element das Bild von k.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

1. Sei A eine n-elementige Menge und es sei B eine m-elementige Teilmenge von A. Wie viele Teilmengen C von A gibt es, die B enthalten, für den Fall $n = 5$ und $m = 2$? Geben Sie eine Formel für den allgemeinen Fall an und begründen Sie diese Formel.

2. Bestimmen Sie den Koeffizienten von t^3xy^4z in $(x + y + z + t)^9$.

   Berechnen Sie das Ergebnis durch sukzessive Klammerung und Bestimmung von Binomialkoeffizienten.

Lösungsvorschlag

1. Sei $B \subseteq A$. Seien $A' := A \setminus B$ und $[B, A] := \{C \subseteq A \mid B \subseteq C \subseteq A\}$ Dann ist $f : [B, A] \to \mathcal{P}(A')$ mit $f(C) = C \setminus B$ eine bijektive Abbildung von $[B, A]$ auf $\mathcal{P}(A')$. Es gilt wegen $|A'| = n - m$

   $$|\mathcal{P}(A')| = 2^{n-m}\,.$$

   Für $n = 5$ und $m = 2$ ergibt sich $|\mathcal{P}(A')| = 2^3 = 8$.

2. Ohne Benutzung des Multinomialkoeffizienten (hier $C(9; 3, 1, 4, 1)$) berechnen wir das Ergebnis direkt durch sukzessive Klammerung und Bestimmung von Binomialkoeffizienten.

   Es gilt

   $$((x + y + z) + t)^9 = \sum_{i=0}^{9} \binom{9}{i} t^i (x + y + z)^{9-i}\,.$$

   Nun betrachten wir den Summanden, der genau den Faktor t^3 enthält, also

   $$\binom{9}{3} t^3 (x + (y + z))^6 = \binom{9}{3} t^3 \sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i} x^i (y + z)^{6-i}\,.$$

   Wir betrachten nun den Summanden, der genau den Faktor x^1 enthält, also

   $$\binom{9}{3} t^3 \binom{6}{1} x^1 (y + z)^5 = \binom{9}{3}\binom{6}{1} x^1 t^3 \sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i} y^i z^{5-i}\,.$$

   Schließlich betrachten wir den Summanden, der genau den Faktor y^4 enthält, also

   $$\binom{9}{3}\binom{6}{1} t^3 x^1 \binom{5}{4} y^4 z^1\,.$$

   Wir erhalten als Koeffizienten von t^3xy^4z

   $$\binom{9}{3}\binom{6}{1}\binom{5}{4} = 2520\,.$$

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Die Binomische Formel gilt auch, wenn man statt Potenzen fallende Faktorielle verwendet. Beweisen Sie die folgende Gleichung durch Induktion.

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}} .$$

Lösungsvorschlag

Für $n = 0$ steht auf beiden Seiten der Gleichungen jeweils die Eins, dieser Fall ist also klar.

Für alle $n \geq 0$ schließt man auf $n+1$ für die fallende Faktorielle wie folgt.

$$\begin{aligned}
(x+y)^{\underline{n+1}} &= (x+y)^{\underline{n}} \cdot (x+y-n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}} (x-k+y-(n-k)) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^{\underline{k+1}} y^{\underline{n-k}} + x^{\underline{k}} y^{\underline{n+1-k}}) \\
&= \binom{n}{n} x^{\underline{n+1}} y^{\underline{0}} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{\underline{k+1}} y^{\underline{n-k}} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n+1-k}} + \binom{n}{n} x^{\underline{0}} y^{\underline{n+1}} \\
&= \binom{n}{n} x^{\underline{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{\underline{k}} y^{\underline{n+1-k}} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n+1-k}} + \binom{n}{n} y^{\underline{n+1}} \\
&= \binom{n}{n} x^{\underline{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^{\underline{k}} y^{\underline{n+1-k}} + \binom{n}{n} y^{\underline{n+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n+1-k}} .
\end{aligned}$$

Hinweis: *Die im Folgenden als* Vorbereitung *bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.*

Vorbereitung 1

Wieviele Stellungen gibt es bei dem Spiel TIC TAC TOE nach 4 Zügen (d. h., wenn jeder Spieler zweimal gesetzt hat)? Der erste Zug sei beliebig.
(siehe auch `http://de.wikipedia.org/wiki/Tic_Tac_Toe`)

Lösungsvorschlag

Für den ersten Zug gibt es 9 Möglichkeiten, für den zweiten 8, usw. . Für die Endstellung ist es aber nicht von Bedeutung, ob der Spieler A bzw. B ein bestimmtes Feld mit seinem ersten oder seinem zweiten Zug belegt hat. Die Anzahl der möglichen Stellungen ist also

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 2} = 756 .$$

Vorbereitung 2

Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, $2n+1$ ($n>1$) ununterscheidbare Bälle in drei verschiedene Boxen (z. B. eine rote, eine grüne und eine blaue Box) zu verteilen, wenn in einer Box maximal $n-1$ Bälle liegen dürfen. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag

Auf Grund des beschränkten Fassungsvermögens ($n-1$) einer einzigen Box sind gewisse Verteilungen nicht möglich. Es gelingt beispielsweise nicht, alle Bälle auf nur 2 Boxen zu verteilen, um imme eine der Boxen leer zu lassen.
Für $n<4$ ist ebenfalls keine Verteilung möglich. Die Anzahl der möglichen Verteilungen ist also in diesem Fall 0.
Wir transformieren nun das Zählmodell, indem wir uns alle Boxen mit je $n-1$ Bällen gefüllt denken. Jede gültige Verteilung erhalten wir dann, wenn wir insgesamt $3(n-1)-(2n+1) = n-4$ Bälle aus den 3 Boxen entnehmen. Dabei ist die Entnahme offenbar ohne Einschränkung aus den 3 Boxen möglich.
Für $n \geq 4$ zählen wir nun die Möglichkeiten, $n-4$ Bälle aus den 3 vollen Boxen zu nehmen. Bei dieser Zählung muss die gleiche Zahl herauskommen, wie wenn man $n-4$ Bälle auf 3 leere Boxen verteilt. Letzteres Problem lösen wir ohne Anwendung von Formeln wie folgt. Wir reihen die $n-4$ Bälle in einer Linie auf. Dann gibt es $n-3$ Möglichkeiten, eine Box vor, zwischen oder nach den Bällen zu stellen. Dann gibt es $n-2$ Möglichkeiten, eine zweite Box vor, zwischen oder nach schon vorhandenen Gegenständen zu stellen. Damit gibt es $(n-3)(n-2)$ Möglichkeiten zwei Boxen in die Bälle einzureihen, von denen allerdings die Hälfte der Möglichkeiten im Ergebnis gleich sind. Für die Lösung L gilt also

$$L = \frac{(n-3)(n-2)}{2}\,.$$

Vorbereitung 3

Wir betrachten die Stirling-Zahlen zweiter Art $S_{n,k}$ für $n,k \in \mathbb{N}_0$, also die Anzahl verschiedener Partitionen einer n-elementigen Menge in k nichtleere, paarweise disjunkte Teilmengen.

1. Begründen Sie kurz die folgenden Spezialfälle.

$$S_{0,0}=1, \quad S_{n,n}=1. \quad S_{n,k}=0, \text{ falls } k>n. \quad S_{n,0}=0, \text{ falls } n>0\,.$$

2. Die Rekursion $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$ für alle $n,k \in \mathbb{N}$ ist aus der Vorlesung bekannt. Studieren Sie die Darstellung der Rekursion bis $n+k=8$ nach Art des Pascalschen Dreiecks aus der Vorlesung.

3. Zeigen Sie für alle $n \geq 1$: (a) $S_{n,2} = 2^{n-1}-1$ und (b) $S_{n,n-1} = \binom{n}{2}$.

Lösungsvorschlag

1. $S_{0,0}$: Für $n=0$ ist eine n-elementige Menge leer. Die leere Partition, d. h. die leere Menge von Klassen, ist eine, und mithin die einzige, Partition der leeren Menge mit $k=0$.

$S_{n,n}$: Eine Partition, die ebensoviele Klassen besitzt, wie die zu partitionierende Menge, besteht aus einelementigen Klassen. Sie ist eindeutig bestimmt.

$S_{n,k}$: Falls $k > n$, dann ist also die Anzahl der Klassen grösser als die zu partitionierende Menge. Da die Klassen disjunkt sind, muss mindestens eine der Klassen dann leer sein, was aber der Definition von Klassen einer Partition widerspricht.

$S_{n,0}$: Da die Vereinigung der Klassen die zu partitionierende, nichtleere Menge überdecken muss, muss mindestens eine nichtleere Klasse existieren. Daraus folgt aber $k > 0$.

2.

$S_{n,k}$	$k = 0$	1	2	3	4
$n = 0$	1				
1	0	1			
2	0	1	1		
3	0	1	3	1	
4	0	1	7	6	1
5	0	1	15	25	(10)
6	0	1	31	(90)	(65)
7	0	1	(63)	(301)	(350)
8	0	(1)	(127)	(966)	(1701)

Die leeren Felder der 9×5-Tabelle stellen die 0 dar. Nach den eingeklammerten Zahlen wurde nicht gefragt.

3. (a) Wir zeigen die Behauptung durch Induktion nach n.
Fall $n = 1$: $S_{n,2} = S_{1,2} = 0 = 2^{1-1} - 1 = 2^{n-1} - 1$.
Sei nun $n > 1$. Für den Induktionsschritt $n - 1 \to n$ beobachten wir zunächst, dass nach der allgemeinen Rekursionsformel $S_{n,2} = S_{n-1,1} + 2S_{n-1,2}$ gilt. Es gilt $S_{n-1,1} = 1$ für $n \geq 2$. Da nach Induktionsvoraussetzung $S_{n-1,2} = 2^{n-2} - 1$ gilt, folgt unmittelbar die Behauptung:

$$S_{n,2} = S_{n-1,1} + 2S_{n-1,2} = 1 + 2 \cdot (2^{n-2} - 1) = 2^{n-1} - 1.$$

(b) Für $n = 1$ bestätigt man $S_{n,0} = 0 = \binom{1}{2}$.
$S_{n,n-1}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, eine n-elementige Menge in $n - 1$ Teilmengen zu partitionieren. Solch eine Partition besteht notwendig aus genau einer 2-elementigen Menge und $n - 2$ einelementigen Mengen. Dabei ist die Partition durch Wahl der 2-elementigen Menge eindeutig bestimmt, da alle anderen Elemente die einelementigen Teilmengen bilden. Umgekehrt induziert jede Wahl einer 2-elementigen Menge solch eine Partition. Man hat also zu einer n-elementigen Menge eine Bijektion zwischen der Menge den Partitionen in $n - 1$-elementige Teilmengen und der Menge der 2-elementigen Teilmengen. Nun gibt es genau $\binom{n}{2}$ 2-elementige Teilmengen aus einer n-elementigen Menge, woraus die Behauptung folgt.

Tutoraufgabe 1

1. Wieviele verschiedene Ergebnisse ("Wurfkonstellationen") kann es geben, wenn man mit 8 Würfeln gleichzeitig würfelt? Unterscheiden Sie dabei zwischen folgenden Szenarien:

   (a) Die Würfel sind alle verschiedenfarbig und damit unterscheidbar.

   (b) Die Würfel sind alle gleichfarbig.

   (c) Fünf Würfel sind blau und drei Würfel sind grün.

2. Wieviele verschiedene Buchstabenfolgen kann man aus den Buchstaben des Wortes *ANTANANARIVO* bilden, wenn jeder Buchstabe genauso oft wie im Ursprungswort vorkommen soll? (Z. B. muss das N genau dreimal vorkommen.)

   Benutzen Sie einen Taschenrechner oder Maple für die Berechnungen!

3. 5 Studenten essen 10 Tafeln Schokolade. Wieviele Möglichkeiten gibt es jeweils, stets ganze Tafeln auf die 5 Studenten aufzuteilen.

   (a) Sie essen 10 nicht unterscheidbare Tafeln. Die Studenten sind aber voneinander unterscheidbar (es ist also nicht egal, wer wieviele bekommt).

   (b) Sie essen 10 nicht unterscheidbare Tafeln. Die Studenten sind nicht unterscheidbar, und jeder isst mindestens eine Tafel.

   (c) Sie essen 10 unterscheidbare Tafeln und es soll jeder Student genau 2 Tafeln bekommen.

4. Die Quersumme der dekadischen Darstellung einer natürlichen Zahl ist die Summe der Ziffern der Darstellung zur Basis 10, z. B. hat 5404 die Quersumme 13. Wieviele Zahlen zwischen 0 und 9999 mit Quersumme 13 gibt es?

Lösungsvorschlag

1. Wirft man die einzelnen Würfeln hintereinander, so handelt es sich hierbei um Ziehen mit Zurücklegen, weil ja eine Zahl, z.B. die 6, sobald sie einmal gewürfelt wurde, trotzdem beim nächsten Wurf wieder auftauchen kann.

   (a) Wenn alle Würfel verschiedenfarbig sind, so handelt es sich um den geordneten Fall, man kann sich vorstellen, die Würfel nach ihren Farben zu ordnen. Demnach gibt es für den ersten Würfel 6, für den zweiten Würfel wieder 6, etc., insgesamt $6^8 = 1679616$ Möglichkeiten.

   (b) Wenn alle Würfel die gleiche Farbe haben, so sind wir im ungeordneten Fall. Die Anzahl der Möglichkeiten entspricht also der Anzahl von 8-elementigen Teilmengen einer 6-elementigen Multimenge. Wenn wir die anschauliche Darstellung mit 8 Sternchen und $6-1 = 5$ Strichen wählen, so gibt es $\binom{8+5}{5} = 1287$ Möglichkeiten 5 Striche aus $8 + 5$ Zeichen auszuwählen.

   (c) In diesem Fall betrachten wir die blauen und grünen Würfel getrennt und multiplizieren die Möglichkeiten miteinander. Es gibt $\binom{5+6-1}{6-1} = 252$ Möglichkeiten für die blauen Würfel und $\binom{3+6-1}{6-1} = 56$ Möglichkeiten für die grünen Würfel, insgesamt also $252 \cdot 56 = 14112$ Möglichkeiten.

2. Wir zählen zunächst die Buchstaben im Wort und es ergibt sich:

   A - 4, N - 3, T - 1, R - 1, I - 1, V - 1, O - 1

   Insgesamt besteht das Wort aus 12 Buchstaben. Um ein Wort aus diesen Buchstaben zu bilden, können wir zunächst aus 12 Positionen 4 auswählen, an denen ein A stehen kann, dann aus verbleibenden 8 Positionen 3 an denen ein N stehen kann, dann wiederum aus 5 Positionen 1 für ein T, etc. Insgesamt ergeben sich

$$\binom{12}{4}\binom{8}{3}\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 3326400$$

   Möglichkeiten. In Maple:

```
> binomial(12,4)*binomial(8,3)*binomial(5,1)*binomial(4,1)*
  binomial(3,1)*binomial(2,1)*binomial(1,1);

                              3326400
```

3. (a) Verteilung n nicht unterscheidbarer Bälle auf k unterscheidbare Urnen:

$$\binom{10-1+5}{10} = \binom{14}{10} = 1001$$

   Bemerkung: Wenn man “5 Studenten essen 10 Tafeln” so auffasst, dass jeder mindestens eine Tafel isst, dann muss man folgendermaßen rechnen:
   Geordnete Zahlpartitionen bzw. n nicht unterscheidbare Bälle auf k unterscheidbare Urnen, wobei in jede Urne mindestens ein Ball kommt, also surjektiv

$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{9}{4} = 126$$

   (b) Ungeordnete Zahlpartitionen bzw. n nicht unterscheidbare Bälle auf k nicht unterscheidbare Urnen, wobei in jede Urne mindestens ein Ball kommt, also surjektiv

$$P_{10,5} = \sum_{i=0}^{5-1} P_{5,5-i} = P_{5,5} + P_{5,4} + P_{5,3} + P_{5,2} + P_{5,1} = 1+1+2+2+1 = 7$$

   Die 7 Möglichkeiten lauten:
   (6,1,1,1,1), (5,2,1,1,1), (4,2,2,1,1), (4,3,1,1,1), (3,2,2,2,1), (3,3,2,1,1), (2,2,2,2,2).

   (c)

$$\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2} = 45 \cdot 28 \cdot 15 \cdot 6 = 113400.$$

4. Wir kodieren die Ziffern $0, 1, 2, \ldots, 9$ entsprechend durch $1, 2, \ldots, 10$ und stellen jede Zahl zwischen 0 und 9999 durch eine Folge von 4 Zahlen aus $1, 2, \ldots, 10$ dar. Die Quersumme dieser Zahldarstellungen ist dann 17. Bekanntlich gibt es $\binom{17-1}{4-1} = \binom{16}{3} = 560$ geordnete Zahlpartitionen der Zahl 17, bestehend aus 4 positiven natürlichen Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4.

Wir müssen davon diejenigen Zahlpartitionen abziehen, in denen ein x_i grösser ist als 10, weil unsere Zahldarstellung dieser Beschränkung unterliegt. Allerdings kann nur höchstens ein x_i grösser sein als 10.

- Es gibt $4 \cdot \binom{6-1}{3-1} = 4 \cdot 10$ Zahlpartitionen, die eine 11 enthalten.
- Es gibt $4 \cdot \binom{5-1}{3-1} = 4 \cdot 6$ Zahlpartitionen, die eine 12 enthalten.
- Es gibt $4 \cdot \binom{4-1}{3-1} = 4 \cdot 3$ Zahlpartitionen, die eine 13 enthalten.
- Es gibt $4 \cdot \binom{3-1}{3-1} = 4 \cdot 1$ Zahlpartitionen, die eine 14 enthalten.

Im Ergebnis gibt es also folgende Anzahl A von Zahlen mit Quersumme 13.

$$A = 560 - 4(10 + 6 + 3 + 1) = 480\,.$$

Tutoraufgabe 2

Tante Erna macht Tee und es kommen n Gäste. Es bilden sich wie immer Gruppen und Grüppchen, in denen die Gäste im Kreis stehen. Jede Gruppe besteht aus mindestens einem Gast und es bilden sich k Gruppen.
Wenn in einer Gruppe mehr als zwei Gäste stehen, dann hat jeder Gast einen linken und einen rechten Gesprächspartner. Zwei Gruppenverteilungen werden als gleich angesehen, wenn jeder Gast die gleichen Nachbarn hat, wobei es aber ein Unterschied sein soll, ob eine bestimmte Person ein linker oder rechter Nachbar einer anderen Person ist.

1. Wieviele Gruppenverteilungen gibt es, wenn Tante Erna zunächst nicht dabei ist?

2. Tante Erna schließt sich nun einer der k Gruppen an. Wieviele Gruppenverteilungen gibt es jetzt?

3. Wir nehmen nun an, dass ein Pärchen unter den Gästen ist, das auf jeden Fall nebeneinander sitzen bzw. stehen will. Wieviele Gruppenverteilungen gibt es jetzt bei k Gruppen (Erna sei nicht dabei) ?

Lösungsvorschlag

1. Wenn die Gäste im Kreis stehen und es darauf ankommt, wer wen rechts oder links als Nachbarn hat, dann bekommt man die Anzahl $AGV(n, k)$ der Möglichkeiten einer Gruppenverteilung mit k Gruppen als Anzahl der Permutationen der Zahlen 1 bis n mit k Zyklen. Die gesuchte Funktion ist durch die Stirlingzahlen 1. Art gegeben.

$$AGV_1(n, k) = s_{n,k}\,.$$

2. Wenn sich Tante Erna einer Gruppe anschliesst, dann bleibt offenbar die Anzahl k der Gruppen gleich, aber die Zahl der Gruppenteilnehmer ist nun $n + 1$ anstatt n. Wir gehen also zunächst von $s_{n+1,k}$ Gruppenverteilungen aus. Nun aber müssen wir berücksichtigen, dass Tante Erna keine einzelne Gruppe bilden will. Wir haben also $s_{n,k-1}$ Gruppenverteilungen abzuziehen, in denen Tante Erna allein eine Gruppe bildet. Wir bekommen die gesuchte Anzahl von Möglichkeiten durch

$$AGV_2(n + 1, k) = s_{n+1,k} - s_{n,k-1} = (s_{n,k-1} + n \cdot s_{n,k}) - s_{n,k-1} = n \cdot s_{n,k}\,.$$

Dieses Ergebnis erhält man auch mit folgender Überlegung. Man kann sich nämlich vorstellen, dass sich Tante Erna eine der n Personen auswählt und sich einfach rechts neben diese Person stellt. Dies ergibt für alle $s_{n,k}$ Gruppenverteilungen jeweils eine neue Gruppenverteilung.

3. Das Pärchen kann zunächst als eine Person behandelt werden. Die Anzahl der Gruppenverteilungen ist dann $s_{n-1,k}$. Allerdings soll es ja ein Unterschied sein, wer von beiden den anderen zum linken bzw. rechten Nachbarn hat. Falls das Pärchen alleine eine Gruppe bildet, dann ist eine Vertauschung nicht definiert. Wenn sich das Pärchen aber zu einer anderen Gruppe gestellt hat, dann gibt es stets zwei Möglichkeiten, zu stehen. Wir erhalten die folgende Anzahl $AGV_3(n,k)$ von Gruppenverteilungen

$$AGV_3(n,k) = s_{n-2,k-1} + 2 \cdot (s_{n-1,k} - s_{n-2,k-1}) = 2 \cdot s_{n-1,k} - s_{n-2,k-1} \,.$$