Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 15
Computergraphik & Visualisierung
Prof. Dr. Rüdiger Westermann
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2007/08
Lösungsblatt 7
12. Dezember 2007

Diskrete Strukturen

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

1. Nehmen wir an, dass jeder der 520000 Einwohner von Hannover zwei Namensinitialen besitzt aus einem 26-elementigen Alphabet. Dabei bilden die zwei Initialen einer Person ein (geordnetes) Buchstaben-2-Tupel.

   Zeigen Sie: Es gibt in Hannover 2 Personen mit gleichen Initialen, die am gleichen Tag des Jahres (365 Tage) Geburtstag haben.

2. Begründen Sie: Es gibt mindestens 4^{n-1} Wörter der Länge $n \in \mathbb{N}$ aus dem Alphabet $\{a, b, c, |\}$, die eine gerade Anzahl von Zeichen '|' enthalten.

Lösungsvorschlag

1. Sei Y die Menge der Kombinationen von zwei geordneten Initialen und einem Geburtstag. Sei X die Menge der Einwohner von Hannover. Die Zuordnung der Initialen und Geburtstage begründet eine Abbildung $f : X \to Y$.

   Die Menge X enthält 520000 Elemente, die Menge Y enthält $|Y| = 26^2 \cdot 365 = 246740$ Elemente. Dann ist nach dem Schubfachprinzip f nicht injektiv, d. h., es gibt 2 Einwohner mit gleichen Initialen und Geburtstag.

2. Sei X die Menge der Wörter $w \in \{a, b, c, |\}^*$ der Länge $n-1$. Die Anzahl der Wörter in X ist 4^{n-1}.

   Entweder enthält ein Wort $w \in X$ eine gerade Anzahl von Zeichen |, dann fügen wir einen Buchstaben a, b oder c an w an.
   Oder w enthält eine ungerade Anzahl von Zeichen |, dann fügen wir das Zeichen | an. In beiden Fällen erhalten wir ein Wort der Länge n, und es ist klar, dass zwei verschiedene Wörter aus X durch das Anfügen eines Zeichens weiterhin verschieden bleiben.

   Ausgehend von 4^{n-1} Wörtern der Länge $n-1$ erhalten wir also durch geeignetes Anfügen eines Zeichens 4^{n-1} Wörter der Länge n, die jeweils eine gerade Anzahl von Vorkommen von | enthalten.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

1. Ein Dominostein besteht aus zwei Quadraten. In jedem Quadrat ist eine Zahl zwischen 1 und 8 durch Punkte dargestellt.
   Wie viele verschiedene Dominosteine gibt es?

2. Bestimmen Sie die Anzahl aller Wörter, die sich aus den Buchstaben des Wortes

   GLOBALISIERUNGSSTRATEGIE

   bilden lassen. Dabei darf und muss jedes Vorkommen eines Buchstaben des o. g. Wortes genau einmal verwendet werden.

3. Wie viele Zahlen zwischen 1 und 1.000.000 gibt es, so dass die Summe der einzelnen Ziffern $\in \{0, \ldots, 9\}$ ihrer Dezimaldarstellung genau 15 beträgt?

4. Wie viele Binärwörter der Länge n (nur Buchstaben 0 und 1) gibt es, die die Ziffernfolge "01" genau zweimal enthält?

Lösungsvorschlag

1. Wir benützen das Modell der Abbildung von Bällen in Urnen. In diesem Fall stellen die Quadrate eines Dominosteines die Bälle dar. Die Zahlen 1 bis 8 stellen die Urnen dar. Die Bälle sind nicht unterscheidbar. Die Urnen sind unterscheidbar. Die Urnen dürfen beliebig gewählt werden. Dann ergibt sich die Anzahl der Abbildungen mit

$$\binom{8+2-1}{2} = \binom{9}{2} = 36\,.$$

   Das alternative algorithmische Modell wäre das ungeordnete Ziehen zweier Zahlen zwischen 1 und 8 mit Zurücklegen. Beide Ansätze bestimmen tatsächlich die Anzahl 2-elementiger Multiteilmengen von [8].

2. Das gegebene Wort hat 24 Buchstaben mit den folgenden Vielfachheiten:
   A - 2, B - 1, E - 3, G - 3, I - 3, L - 2, N - 1, O - 1, R - 2, S - 3, T - 2, U - 1.

   Wären alle Buchstabenvorkommen unterscheidbar, dann gäbe es 24! verschiedene Wörter. Allerdings sind $2! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!$ der Wörter gleich, weil sie sich nur durch Vertauschung gleicher Buchstaben ergeben. Damit ergibt sich die Anzahl der verschiedenen Wörter mit

$$\frac{24!}{2!3!3!3!2!2!3!2!} = \frac{24!}{(2!)^4 3!^4} = \frac{24!}{2^8 3^4}\,.$$

3. Die Zahl 1.000.000 muß sicher nicht mitgezählt werden. Es genügt also 6 Stellen der Dezimaldarstellung zu betrachten.

   Wir verteilen $n = 15$ Zähleinheiten mit dem Wert 1 auf die $m = 6$ Stellen beliebig (Null ist zugelassen). Dies entspricht der Anzahl der 15-elementigen Multiteilmengen einer 6-elementigen Menge. Dies entspricht auch der Anzahl der Lösungen von $\sum_{i=1}^{6} x_i = 15$ für $x_i \in \mathbb{N}_0$

$$\binom{n+m-1}{n}\,.$$

Damit gibt es $\binom{20}{15} = \binom{20}{5}$ Zahl-6-Partitionen von 15 (Nullen zugelassen), die zur Zahldarstellung in Frage kommen.

Um eine gültige Dezimaldarstellung konstruieren zu können, müssen wir noch sicherstellen, dass $x_i < 10$ für alle i. Wir ziehen also die Fälle ab, wo ein x_i größer oder gleich 10 ist. Dazu muss eine der Variablen x_i zwischen 10 und 15 liegen und wir erhalten

$$6 \cdot \sum_{i=10}^{15} \binom{15-i+5-1}{5-1} \quad = \quad 6 \cdot \sum_{i=0}^{5} \binom{4+i}{4} \;=\; 6 \cdot \binom{10}{5} = 1512$$

mögliche Fälle, die zuviel gezählt wurden. (Die vorletzte Gleichung folgt aus dem Pascal'schen Dreieck bzw. der Rekursionsformel der Binomialkoeffizienten). Insgesamt ergeben sich also

$$\binom{20}{5} - 1512 = 13992$$

verschiedene Zahlen zwischen 1 und 1.000.000 mit Ziffernsumme 15 .

4. Wir können jedes Binärwort in 6 Blöcke aufteilen. Der 1. Block A besteht aus Einsen, der 2. Block B aus Nullen, der 3. Block C wiederum aus Einsen, der 4. Block D aus Nullen, der 5. Block E aus Einsen und der letzte Block F aus Nullen. Wir stellen weiterhin fest, dass B, C, D, E nicht leer sein dürfen. Die erste Gruppe "01" ist dann der Übergang von B nach C, die zweite Gruppe der Übergang von D nach E. Die Blöcke A und F können auch leer sein. Bezeichnen wir die Länge der Blöcke mit a, b, c, d, e, f, dann gilt:

$$a+b+c+d+e+f = n \quad b, c, d, e > 0.$$

Das ist äquivalent zu (wir ziehen von b, c, d, e eins ab):

$$a+b'+c'+d'+e'+f = n-4 \quad a, b', c', d', e', f \geq 0.$$

Die Anzahl von Lösungen dieser Gleichung ist

$$\binom{6+n-4-1}{n-4} = \binom{n+1}{n-4}.$$

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 gleiche (nicht unterscheidbare) Fahrzeuge auf 8 unterscheidbare Personen zu verteilen?

2. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 nicht unterscheidbare Gegenstände in 3 nicht unterscheidbare Schachteln zu legen?

3. Wie viele Partitionen einer 10-elementigen Menge gibt es, wenn nur diejenigen Partitionen gezählt werden, die aus 5 Klassen mit je 2 Elementen bestehen?

Lösungsvorschlag

1. Die Verteilung entspricht einer Abbildung von 4 gleichen Bällen auf 8 unterscheidbare Urnen. Die Anzahl der Abbildungen ist $\binom{8+4-1}{4} = 330$.

2. Elementares Auszählen ergibt 4 Möglichkeiten.
   Bestimmung durch die Formel für ungeordnete Zahlpartitionen $P_{n,k}$:

$$P_{7,3} = \sum_{j=1}^{3} P_{4,j} = 1 + 2 + 1 = 4\,.$$

3. Sei x eines der 10 Elemente. Dann gibt es 9 Möglichkeiten, dass ein zweites Element zusammen mit x eine Klasse der Partition bildet. Im übrigen muss man noch die Anzahl der entsprechenden Partitionen mit 4 Klassen bestimmen für 8 Elemente. Insgesamt ergeben sich $9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = 945$ Partitionen.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

In einem Rangierbahnhof gibt es 31 parallel laufende Gleise, auf denen Schwertransporte zusammengestellt werden. Wegen der übermäßigen Breite der Ladung können keine zwei Züge auf benachbarten Gleisen plaziert werden.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, 10 (nicht unterscheidbare) Züge auf die Gleise so zu verteilen, dass sich die Züge nicht behindern?

Lösungsvorschlag

10 Züge benötigen minimal 19 Gleise. An den 11 Stellen vor oder nach einem Zug können noch 12 freie Gleise eingefügt werden. Die Verteilung entspricht einer Abbildung von $n = 12$ nicht unterscheidbaren Gleisen auf $m = 11$ unterscheidbare Stellen. Dies entspricht der Anzahl von $n = 12$-elementigen Multiteilmengen einer $m = 11$-elementigen Menge. Für die gesuchte Anzahl x folgt

$$x = \binom{12 + 11 - 1}{12} = \binom{22}{12} = 646646\,.$$

Hinweis: Die im Folgenden als Vorbereitung *bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.*

Vorbereitung 1

(Zusätzlich zur Klausurvorbereitung)
4 Geschwister treten gemeinsam ein Erbe an. Wie viele Möglichkeiten gibt es jeweils, das Erbe aufzuteilen?

1. Sie erben 10 nicht unterscheidbare Goldmünzen und es ist nicht egal, wer wie viele bekommt.

2. Sie erben 10 nicht unterscheidbare Goldmünzen und sie wollen nur wissen, wie viele Möglichkeiten der Aufteilung in 4 nichtleere Mengen es gibt (ohne Berücksichtigung, wer genau welche Menge bekommt).

3. Sie erben 8 unterschiedliche Goldmünzen und davon soll jeder genau 2 bekommen.

Lösungsvorschlag

1. Es werden die 10-elementigen Multiteilmengen der Menge der 4 Geschwister gebildet. Die Anzahl x dieser Mengen ist

$$x = \binom{10+4-1}{10} = \binom{13}{3} = 286\,.$$

2. Gefragt ist also nach der Anzahl x der ungeordneten 4-Zahlpartitionen der Zahl 10, oder anders ausgedrückt, der Anzahl x der surjektiven Abbildungen der Menge von nicht unterscheidbaren Goldmünzen auf eine Menge von 4 nicht unterscheidbaren Personen. Es gilt

$$\begin{aligned} x &= P_{10,4} \\ &= \sum_{i=0}^{4} P_{6,i} \\ &= P_{6,0} + P_{6,1} + P_{6,2} + P_{6,3} + P_{6,4} \\ &= 0 + 1 + 3 + 3 + 2 \\ &= 9\,. \end{aligned}$$

3. Der erste Erbe wählt eine 2-elementige Menge aus, der zweite aus dem Rest ebenfalls eine 2-elementige Menge usw. Wir erhalten für die gesuchte Anzahl x von Verteilungsmöglichkeiten

$$x = \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1 = 2520\,.$$

Vorbereitung 2

(Zusätzlich zur Klausurvorbereitung)
Eine Bankreihe in einem Hörsaal hat n nummerierte Plätze. Allerdings dürfen in der Klausur Studenten nicht direkt nebeneinander sitzen.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Plätze in einer Reihe so zu besetzen, dass in der Reihe k Studenten sitzen?

Lösungsvorschlag

k Studenten benötigen minimal $2k-1$ Plätze. Dann gibt es $n-2k+1$ freie Pätze, die auf $k+1$ Stellen links oder rechts neben einem Studenten verteilt werden können. Die Anzahl x der Möglichkeiten, $n-2k+1$ (nichtunterscheidbare) Plätze auf $k+1$ (unterscheidbare) Stellen beliebig zu verteilen, ist gegeben durch

$$x = \binom{k+1+(n-2k+1)}{n-2k+1} = \binom{n-k+1}{n-2k+1} = \binom{n-k+1}{k}.$$

Tutoraufgabe 1

Die Zählung der Möglichkeiten, eine Menge in $k \in \mathbb{N}_0$ Klassen zu partitionieren, hängt davon ab, ob die in der Menge enthaltenen Elemente unterscheidbar sind. Wir betrachten Mengen M mit $n \in \mathbb{N}_0$ nicht unterscheidbaren Elementen. Sei $P_{n,k}$ die Anzahl der Partitionen von M in k Klassen.

1. Bestimmen Sie $P_{n,0}$, $P_{n,k}$ und $P_{n,n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $k > n$!

2. Beweisen Sie für alle $k \leq n$: $\quad P_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} P_{n-k,i}$.

3. Welcher Zusammenhang besteht zwischen ungeordneten k-Zahlpartitionen und den o. g. Partitionen von Mengen mit nicht unterscheidbaren Elementen.
   Diskutieren Sie den Zusammenhang zwischen der Aufgabe, n unterscheidbare Bälle in m nicht unterscheidbare Urnen zu verteilen, und der Aufgabe, n nicht unterscheidbare Bälle in m nicht unterscheidbare Urnen zu verteilen.

Lösungsvorschlag

Die Formulierung der Aufgabe soll zum einen auf den Zusammenhang der Partitionen einer Menge von n nicht unterscheidbaren Elementen mit den ungeordneten Zahlpartitionen der Zahl n hinweisen, zum anderen aber auch hinweisen auf den Zusammenhang der Partitionen von Mengen nicht unterscheidbarer Elemente mit den Partitionen von Mengen unterscheidbarer Elemente.
Man beachte auch, dass bei der Zählung der Klassen einer Partition ausschließlich nichtleere Klassen gezählt werden, wogegen die Menge der Klassen durchaus leer sein darf.

1. Die folgenden Aussagen sind analog zu den entsprechenden Aussagen in der Vorbereitungsaufgabe 3.1 von Übungsblatt 6, wo Stirlingzahlen $S_{n,k}$ betrachtet werden.

   $P_{0,0}$: Für $n = 0$ ist eine n-elementige Menge leer. Die leere Partition, d. h. die leere Menge von Klassen, ist eine, und mithin die einzige, Partition der leeren Menge mit $k = 0$. Es folgt $P_{0,0} = 1$.

$P_{n,0}, n > 0$: Da die Vereinigung aller Klassen die zu partitionierende, nichtleere Menge überdecken muss, exisitiert mindestens eine nichtleere Klasse. Daraus folgt aber $k > 0$. Mithin gilt $P_{n,0} = 0$.

$P_{n,n}$: Eine Partition, die ebenso viele Klassen besitzt, wie die zu partitionierende Menge, besteht aus einelementigen Klassen. Sie ist eindeutig bestimmt. Es folgt $P_{n,n} = 1$.

$P_{n,k}$: Falls $k > n$, dann soll die Anzahl der Klassen einer Partition grösser sein als die Mächtigkeit der zu partitionierenden Menge. Da die Klassen jeder angenommenen Partition paarweise disjunkt sind, muss mindestens eine der Klassen leer sein, was aber der Definition von Klassen einer Partition widerspricht. Als folgt $P_{n,k} = 0$, weil keine solche Partition existiert.

2. Für $k = 0$ folgt unmittelbar $\sum_{i=0}^{k} P_{n-k,i} = P_{n-0,0} = P_{n,0}$.

   Sei $1 \leq k \leq n$. Sei P eine Partition einer Menge von n nicht unterscheidbaren Elementen in k Klassen. Entfernt man aus jeder Klasse ein beliebiges (weil nicht unterscheidbares) Element, so erhält man i nichtleere Klassen mit $0 \leq i \leq n$, deren Vereinigung $n-k$ Elemente enthält. D. h., wir erhalten eine Partition einer $(n-k)$-elementigen Menge mit i Klassen. Die Operation der Entfernung eines Elements aus jeder Klasse liefert eine bijektive Abbildung der Menge der k-Partitionen einer n-elementigen Menge auf die disjunkte Vereinigungsmenge aller i-Partitionen einer $(n-k)$-elementigen Menge. Daraus folgt $P_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} P_{n-k,i}$.

3. Teilmengen einer Menge nicht unterscheidbarer Elemente werden durch die Anzahl der enthaltenen Elemente vollständig charakterisiert. Die Partitionen einer Mengen nicht unterscheidbarer Elemente sind dann durch die Multimenge der Klassenmächtigkeiten bzw. deren Summe bestimmt, was unmittelbar den Zusammenhang mit den ungeordneten Zahlpartitionen begründet.

   Bei der Aufgabe, Bälle in Urnen zu verteilen, geht es um die Aufgabe, Abbildungen einer Menge von "Bällen" in eine Menge von "Urnen" zu betrachten. Genau genommen geht es ganz allgemein um Abbildungen einer Menge A in eine Menge B. Wenn wir von Bällen und Urnen oder Boxen sprechen, dann nur deshalb, um eine Anschauung zu liefern auch für die Betrachtung nicht unterscheidbarer Objekte, d. h. um eine Veranschaulichung zu liefern für Abbildungen von Multimengen in Multimengen.

   Die Nichtunterscheidbarkeit der Urnen bedeutet, dass man über Klasseneinteilungen der Bälle, d. h. Partitionen der Menge von Bällen spricht, denn wenn es gleichgültig ist, in welche Urne ein Ball gelegt wird, dann ist offenbar nur interessant, welche Bälle in die gleiche Urne gelegt werden. Diese Gleichheit der Abbildung von Elementen entspricht aber genau der Klasseneinteilung von Bällen.

   Also können im Fall nicht unterscheidbarer Urnen die Urnen selbst aus der Betrachtung entfernt werden und wir sprechen lediglich über Klasseneinteilungen, d. h. Partitionen von Mengen.

   Nun gibt es Eigenschaften von Partitionen, die unabhängig davon sind, ob die enthaltenen Elemente unterscheidbar sind oder nicht. Dazu sehen wir uns die zweite und dritte Zeile der Tabelle der Vorlesung vom 27.11.07, Folie 31 an, die völlig identisch sind abgesehen von der Zählfunktion S bzw. P.

Zu diesen Eigenschaften zählen auch die in Teilaufgabe 1 bewiesenen Eigenschaften.

Tutoraufgabe 2

1. Zeigen Sie, dass der Graph C_{2n} für $n \in \mathbb{N}$ bipartit ist.

2. Zeigen oder widerlegen Sie: Jeder Graph mit $n \geq 2$ Knoten enthält mindestens zwei Knoten mit gleichem Grad.

Lösungsvorschlag

1. Die Knoten des Graphen $(V, E) = C_{2n}$ lassen sich mit Nummern von 1 bis $2n$ identifizieren, so dass sich eine Kante $\{x, y\}$ als Menge $\{k, k+1\}$ oder $\{2n, 1\}$ darstellen lässt. Für die disjunkte Zerlegung V_1, V_2 von V mit $V_1 = \{1, 3, \ldots, 2n-1\}$ und $V_2 = \{2, 4, \ldots, 2n\}$ gilt dann für alle Kanten $\{x, y\} \in E$ entweder $x \in V_1 \wedge y \in V_2$ oder $x \in V_2 \wedge y \in V_1$. Mithin ist C_{2n} bipartit.

2. Wir zeigen, dass jeder Graph mit $n \geq 2$ Knoten mindestens zwei Knoten mit gleichem Grad enthält.

   Sei G ein Graph mit n Knoten. Der Grad eines Knotens x kann höchstens $n-1$ sein, denn x kann höchstens mit $n-1$ anderen Knoten verbunden sein. Es gibt also nur n Zahlen $0, 1, 2, \ldots, n-1$, die als Gradzahlen zur Verfügung stehen. Die Zuordnung eines Grades zu einem Knoten ist eine Abbildung der Knotenmenge in die Menge der Gradzahlen. Falls die Bildmenge dieser Abbildung weniger Zahlen enthält als es Knoten gibt, muß es nach dem Schubfachprinzip zwei Knoten mit dem gleichen Grad geben. Wenn aber n Gradzahlen auftreten, dann muß eine Gradzahl die 0 sein, d. h. es muß einen isolierten Knoten geben. Dann aber kann die Gradzahl $n-1$ nicht mehr vorkommen, weil jeder Knoten nur mehr mit höchstens $n-2$ Knoten verbunden sein kann, im Widerspruch zur Annahme von n Gradzahlen.

Tutoraufgabe 3

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *vollständig*, wenn je zwei Knoten durch eine Kante verbunden sind. Ein *(Knoten-)induzierter Teilgraph* G' von G ist ein Graph $G' = (V', E')$, so daß $V' \subseteq V$ und $E' = \{\{v, w\} \in E \mid v \in V' \wedge w \in V'\}$.

1. Wie viele Kanten hat der Graph K_n?

2. Wie viele vollständige induzierte Teilgraphen enthält der K_n?

3. Wie viele Sterne vom Grad k enthält der K_n?
   Ein Stern vom Grad k besteht aus $k+1$ Knoten und k Kanten. Einer der Knoten (die Mitte) hat Grad k, alle anderen Knoten haben Grad 1. "Enthalten sein" bedeutet in diesem Fall, dass man so lange Kanten entfernt, bis ein Stern übrig bleibt.

4. Nun entfernt man eine Kante in K_n. Wie viele vollständige induzierte Teilgraphen gibt es nun?

Lösungsvorschlag

Der K_n wurde definiert als der vollständige (ungerichtete) Graph mit n Knoten. Im K_n wird also jeder Knoten mit jedem anderen Knoten über eine Kante verbunden.

1. Eine Kante in einem Graphen ist genau eine 2-elementige Teilmenge der Knotenmenge. Somit ist die Kantenzahl im K_n gleich
$$\frac{n \cdot (n-1)}{2}.$$

2. Da der K_n vollständig ist, induziert jede Teilmenge von Knoten einen vollständigen Teilgraphen von K_n. Somit gibt es $2^n - 1$ induzierte Teilgraphen, wobei man Einknoten-Teilgraphen zulässt, nicht aber leere Teilgraphen.

3. Es gibt $\binom{n}{k+1}$ induzierte vollständige Teilgraphen mit genau $k+1$ Knoten. In jedem dieser Teilgraphen kann man noch aus $k+1$ Knoten einen Mittelknoten wählen, die restlichen Kanten entfernt man. Insgesamt gibt es also
$$\binom{n}{k+1} \cdot (k+1)$$
k-Sterne im Graphen.

4. Es gehen alle induzierten vollständigen Teilgraphen verloren, die **beide** zur Kante inzidenten Knoten enthalten. Die verlorenen Teilgraphen entsprechen genau den Obermengen der beiden Knoten. Nun aber gibt es gemäß Übungsblatt 6, HA 3 genau 2^{n-2} Teilmengen der n-elementigen Knotenmenge, die die beiden Knoten enthalten. Folglich bleiben also $2^n - 1 - 2^{n-2} = 3 \cdot 2^{n-2} - 1$ induzierte vollständige Teilgraphen übrig.