Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 15
Computergraphik & Visualisierung
Prof. Dr. Rüdiger Westermann
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2007/08
Lösungsblatt 8
31. Januar 2008

Diskrete Strukturen

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Gegeben sei der Graph

$$G = (\{a, b, c, d, e, f, g, h\}, \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, d\}, \{c, h\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{g, h\}\})\,.$$

Stellen Sie für den Graph G

1. die Inzidenzmatrix und
2. die Adjazenzmatrix auf.
3. Welche Zusammenhangskomponenten hat G?
4. Zeichnen Sie eine graphische Darstellung von G.

Lösungsvorschlag

In der Vorlesung wurde eine Inzidenzmatrix ganz allgemein definiert zur Darstellung einer Relation zwischen einer Menge S und einer Menge T.

1. Im Kontext von Graphen betrachtet man die Inzidenzrelation zwischen der Knotenmenge V und der Kantenmenge E. Die entsprechende Inzidenzmatrix der Inzidenzrelation heißt dann Inzidenzmatrix B_G des Graphen G. Für o.g. Graphen G gilt mit einer den obigen Auflistungen entsprechenden Nummerierung von Knoten 1 bis $|V| = 8$ bzw. Kanten 1 bis $|E| = 8$

$$B_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Im Kontext von Graphen betrachtet man die Adjazenzrelation auf der Knotenmenge, die durch das Vorhandensein einer Kante $\{a, b\}$ für Knotenpaare a, b definiert ist. Die entsprechende Inzidenzmatrix der Adjazenzrelation heißt dann Adjazenzmatrix

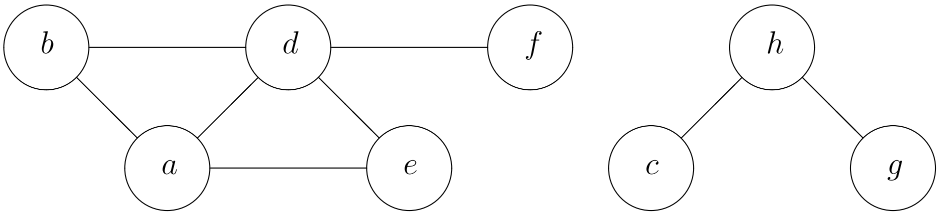
A_G des Graphen G. Für o.g. Graphen G gilt mit der obigen Auflistung entsprechenden Nummerierung der Knoten 1 bis $|V| = 8$

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Die Äquivalenzrelation der Erreichbarkeit auf der Knotenmenge von G besteht aus den Klassen $\{a, b, d, e, f\}$ und $\{c, g, h\}$. Dies entnimmt man unmittelbar aus der nachfolgenden graphischen Darstellung von G.

   Die gesuchten induzierten Graphen sind also $G[\{a, b, d, e, f\}]$ und $G[\{c, g, h\}]$.

4.



Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Beweisen Sie: In jedem eulerschen Graphen gibt es ein System von Kreisen $C_1, \ldots, C_r$, so dass jede Kante des Graphen genau einmal in einem Kreis liegt.

Lösungsvorschlag

Sei $W = \{u_{i_1}, \ldots, u_{i_r} = u_{i_1}\}$ eine Eulertour. Wir laufen durch den Graphen auf diesem Weg durch und speichern die besuchten Knoten auf einem Stack. Immer, wenn sich ein Kreis schließt, wird er ausgegeben und alle Knoten des Kreises (bis auf den Startknoten) werden vom Stack entfernt. Dieser Algorithmus liefert eine Zerlegung der Kantenmenge in Kreise, wobei jede Kante genau einmal im Kreis enthalten ist (die Eulertour enthält jede Kante nur einmal).

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Beweisen Sie: Ein planarer dreiecksfreier Graph besitzt einen Knoten vom Grad höchstens 3. Dabei heißt ein Graph dreiecksfrei, wenn er keinen K_3 als Teilgraph enthält.

Lösungsvorschlag

Sei $G = (V, E)$ ein dreiecksfreier planarer Graph mit n Knoten und m Kanten, der in der Ebene eingebettet ist. Sei f die Anzahl der Gebiete, die die Kanten des Graphen eingrenzen. Da in G keine Dreiecke vorkommen, so ist jedes Gebiet durch mindestens 4 Kanten begrenzt. Die Gesamtanzahl der Kanten, die alle Gebiete begrenzen ist somit mindestens $4f$. Da aber dabei jede Kante höchstens doppelt gezählt wird (die Kanten am Rand des Graphen werden nur einmal gezählt), ergibt sich die Abschätzung $m \geq 2f$. Andererseits liefert die Eulersche Formel die Beziehung

$$f - m + n - 2 = 0.$$

Zusammen mit der obigen Abschätzung erhalten wir

$$m \leq 2n - 4. \tag{1}$$

Hätte jetzt G lauter Knoten vom Grad mindestens 4, so würde gelten

$$m = \frac{\sum_{v \in V} \deg(v)}{2} \geq 2n,$$

was aber (1) widerspricht.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph mit mindestens 4 Knoten, und der Grad der Knoten sei größer oder gleich 3 für alle Knoten.
Beweisen Sie: Es gibt mindestens 4 Knoten vom Grad höchstens 5.

Lösungsvorschlag

Wir verwenden die Euler-Formel für planare Graphen $|E| \leq 3\,|V| - 6$ und die Grapheigenschaft $\sum_{v \in V} deg(v) = 2\,|E|$. Angenommen, es gibt höchstens 3 Knoten vom Grad höchstens 5, dann gilt:

$$\sum_{v \in V} deg(v) \;\geq\; \underbrace{3 \cdot 3}_{\text{Knoten mit } deg \leq 5} + \underbrace{6(|V| - 3)}_{\text{Knoten mit } deg > 5}$$

Beachten Sie hierbei, dass jeder Knoten mindestens Grad 3 hat. Mit der Eulerformel gilt dann aber

$$6\,|V| - 12 \;\geq\; 2\,|E| = \sum_{v \in V} deg(v) \;\geq\; 6\,|V| - 9,$$

ein Widerspruch! Damit gibt es mindestens 4 Knoten vom Grad höchstens 5.

Hinweis: *Die im Folgenden als* Vorbereitung *bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.*

Vorbereitung 1

Die absteigende Gradfolge eines Graphen G mit Knotenmenge $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ist definiert als die Folge der in absteigender Reihenfolge angeordneten Knotengrade $\mathrm{d}(v_i)$.

1. Gibt es Graphen zu folgenden Gradfolgen?

   i) $2, 1, 0$.   ii) $3, 3, 3, 3, 2, 2$.   iii) $3, 3, 3, 2, 2, 2$.

2. Beweisen oder widerlegen Sie:
   i) Zwei isomorphe Graphen haben die gleiche Gradfolge.
   ii) Zwei Graphen, die die gleiche Gradfolge haben, sind isomorph.

Lösungsvorschlag

1. i) Nein, denn wenn einer der drei Knoten schon mit beiden anderen Knoten verbunden ist, kann es keinen isolierten Knoten (Grad 0) geben. Außerdem muß die Summe der Grade gerade sein.

   ii) Ja. Beispielsweise

   $$G = ([6], \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{2,4\}, \{2,6\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,6\}\}) .$$

   iii) Nein, denn die Gradsumme eines Graphen ist immer gerade.

2. i) Für isomorphe Graphen G_1, G_2 gibt es eine bijektive Zuordnung der Knoten beider Graphen und zwar so, dass die Kantenbeziehungen und damit die Knotengrade erhalten bleiben. Somit sind auch die Gradfolgen identisch.

   ii) Die Umkehrung des vorigen Satzes gilt nicht! Man hätte dann in dem Vergleich der Gradfolgen ein effizientes Verfahren um die Isomorphie von Graphen zu testen. Dies ist jedoch bekanntlich nicht effizient lösbar.

   Man kann aber auch anders argumentieren, indem man nämlich zwei nicht isomorphe Graphen mit gleicher Gradfolge konstruiert. Seien
   $G_1 = ([6], \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{1,6\}, \{3,5\}\})$,
   $G_2 = ([6], \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{1,5\}, \{2,6\}\})$.
   G_1 und G_2 sind nicht isomorph, haben aber die gleiche Gradfolge 3,2,2,1,1,1.

Vorbereitung 2

Zeigen Sie, dass jeder Baum $T = (V, E)$ mit $deg(v) \neq 2$ für alle $v \in V$ und $|V| \geq 2$ einen Knoten v_0 enthält, der zu mindestens 2 Knoten benachbart ist. Dabei bezeichnet $deg(v)$ den Grad von v.

Lösungsvorschlag

Die Aussage ist falsch und wird widerlegt durch den Baum mit 2 Knoten. Die korrekte Aussage ist nun als Hausaufgabe 1 auf Blatt 9 zu beweisen.

Tutoraufgabe 1

Beweisen oder widerlegen Sie mit Hilfe des Satzes von Kuratowski die folgenden Aussagen.

1. Es ist möglich, drei Häuser mit Strom, Gas und Wasser zu versorgen, wenn die Leitungen alle ebenerdig verlaufen müssen und sich nicht schneiden dürfen.
2. Wenn man zu einem beliebigen Baum $G = (V, E)$ einen neuen Knoten v hinzufügt und v mit allen Knoten in V verbindet, so ist der entstehende Graph planar.
3. Entfernt man aus dem $K_{3,3}$ eine beliebige Kante, dann ist der entstehende Graph planar.

Lösungsvorschlag

1. Die abstrakte Darstellung der Aufgaben modelliert die 3 Häuser bzw. die 3 Versorgungsanschlüsse je mit einem Knoten eines vollständigen bipartiten Graphen zwischen einerseits den Häusern und andererseits den Versorgungsanschlüssen. Dies ist ein vollständiger bipartiter Graph $K_{3,3}$. Der Graph ist trivialerweise eine Unterteilung des $K_{3,3}$ und ist deshalb nach dem Satz von Kuratowski nicht planar.

   Die Bedingungen können also nicht erfüllt werden.

2. Anschaulich ist der Sachverhalt klar, wenn man den Baum in der Ebene zeichnet und so orientiert, dass die Wurzel oben ist und die Kantenverzweigungen sich nach unten als Geradenstücke erstrecken. Nun kann man die Ebene in zwei Halbebenen teilen, so dass sich der Baum vollständig in der oberen Hälfte befindet.

   Einen zusätzlichen Knoten v plaziert man in der unteren Halbebene und sieht, dass man von unten her mit geeigneten stetigen Kurven alle Knoten kreuzungsfrei erreichen kann.

   Der entstehende Graph ist also planar.

3. Entfernt man aus dem $K_{3,3}$ eine Kante, dann kann der resultierende Graph R natürlich keine Unterteilung des $K_{3,3}$ mehr enthalten, weil die Anzahl der Kanten dann zu gering ist.

   Aber auch eine Unterteilung des K_5 kann nicht mehr in R enthalten sein, weil der K_5 ja 10 Kanten enthält und jede Unterteilung von K_5 ebenfalls mindestens 10 Kanten enthalten müsste.

   R ist also nach dem Satz von Kuratowski planar.

Tutoraufgabe 2

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

1. G ist ein Baum.
2. G ist maximal kreisfrei. Das bedeutet, dass G kreisfrei ist und es für jede Kante $e \in \{\{v_1, v_2\};\ v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2\} \setminus E$ im Graph $(V, E \cup \{e\})$ einen Kreis gibt.
3. G ist minimal zusammenhängend. D. h., G ist zusammenhängend und für jede Kante $e \in E$ ist der Graph $(V, E \setminus \{e\})$ nicht zusammenhängend.

Lösungsvorschlag

1. $\Rightarrow$ 2.: Ein Baum ist ein zusammenhängender, kreisfreier Graph. Nach Vorlesung gilt außerdem $|E| = |V| - 1$.

   Sei nun $e = \{v_1, v_2\}$ mit $v_1 \neq v_2$ und $e \notin E$. Der Graph $(V, E \cup \{e\})$ besitzt genau so viele Kanten wie Knoten, er ist also nach Vorlesung kein Baum mehr. Da er aber weiterhin zusammenhängend ist, muss er nun einen Kreis enthalten.

2. $\Rightarrow$ 3.: Wir zeigen zunächst, dass G zusammenhängend ist. Angenommen, G ist nicht zusammenhängend, dann enthält G zwei Knoten v, w, die nicht durch einen Pfad verbunden sind. Das Einfügen von $\{v, w\}$ erzeugt dann keinen Kreis, was der maximalen Kreisfreiheit widerspricht.

   Nun beweisen wir, dass G minimal zusammenhängend ist. Sei $\{u, v\} \in E$ eine beliebige Kante des Graphen. Wenn $(V, E \setminus \{u, v\})$ zusammenhängend ist, so gibt es einen Pfad $(u, u_1, \ldots, u_r, v)$ von u nach v mit $u_i \neq u$ und $u_i \neq v$ für $i \in \{1, \ldots, r\}$. Damit ist aber $(u, u_1, \ldots, u_r, v)$ ein Kreis in G. Widerspruch.

3. $\Rightarrow$ 1.: Wir haben zu zeigen, dass G kreisfrei ist. Würde G aber einen Kreis enthalten, so könnte man eine Kante aus dem Kreis entfernen, ohne die Erreichbarkeit der anderen Knoten zu verletzen. Widerspruch.

Tutoraufgabe 3

1. Gegeben seien die Bäume

   $B_1 = ([9], \{\{1,9\}, \{2,7\}, \{4,7\}, \{5,6\}, \{8,3\}, \{6,7\}, \{7,9\}, \{3,9\}\})$,
   $B_2 = ([9], \{\{2,1\}, \{1,7\}, \{5,7\}, \{4,1\}, \{7,3\}, \{9,3\}, \{6,4\}, \{8,4\}\})$.

   Bestimmen Sie zu B_1 und B_2 jeweils den Prüfer-Code.

2. Bestimmen Sie zu den folgenden Prüfer-Codes die zugehörigen Bäume.

   i) 77777777, ii) 1212121, iii) 9876543, iv) 82267222.

3. Man zeige: Wenn man den vollständigen Graphen K_n mit beliebigem $n \in \mathbb{N}$ ausgehend von einem beliebigen Knoten mit Tiefensuche (Algorithmus DFS) durchsucht, dann ist der resultierende Spannbaum immer ein einfacher Pfad.

Lösungsvorschlag

1. Den Prüfer-Code von Bäumen B_1, B_2 erhält man, indem man, ausgehend von einer lückenlosen und eindeutigen Knotennummerierung von 1 ab, stets das Blatt mit der kleinsten Knotennummer bestimmt und denjenigen Knoten notiert, an dem das Blatt hängt. Anschließend wird das Blatt aus dem Baum gestrichen und der Schritt so lange wiederholt bis nur noch 2 Knoten übrig sind.

   Für B_1 erhalten wir den Prüfer-Code 9776793.
   Für B_2 erhalten wir den Prüfer-Code 1744173.

   Bemerkung: Falls der Baum mehr als 9 Knoten hat, dann muß man die Knotennummern im Code klammern.

2. Die Anzahl der Knoten des dargestellten Baumes ist um 2 größer als die Länge l des Codes. Die Knotennummern sind also $[l+2]$.

   Diejenigen Knotennummern, die im Code nicht vorkommen, bilden die Blätter des Baumes. Zur Rekonstruktion des Baumes nimmt man dasjenige Blatt mit der kleinsten Nummer und verbindet es mit dem Knoten, dessen Knotennummer im Code als erste steht. Man streicht dann die verarbeitete Blattnummer aus der Liste der noch nicht verarbeiteten Blätter. Nun wiederholt man den Schritt mit dem noch nicht verarbeiteten Abschnitt des Codes (erstes Element wird gestrichen), so lange bis alle Codziffern verarbeitet sind. Die beiden Knoten in der verbliebenen Liste der noch nicht verarbeiteten Blätter verbindet man. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
B_i &= ([10], \{\{1,7\},\{2,7\},\{3,7\},\{4,7\},\{5,7\},\{6,7\},\{8,7\},\{9,7\},\{10,7\}\})\,,\\
B_{ii} &= ([9], \{\{2,8\},\{2,6\},\{2,4\},\{1,3\},\{1,5\},\{1,7\},\{1,9\},\{2,1\}\})\,,\\
B_{iii} &= ([9], \{\{1,9\},\{9,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,6\},\{6,7\},\{7,8\},\{8,2\}\})\,,\\
B_{iv} &= ([10], \{\{1,8\},\{8,2\},\{3,2\},\{4,2\},\{7,2\},\{9,2\},\{10,2\},\{6,7\},\{6,5\}\})\,.
\end{aligned}$$

3. Für den ersten Knoten wird zufällig einer von $n-1$ Knoten als Nachfolger ausgewählt. Für den zweiten Knoten stehen $n-2$ Nachbarn zur Wahl. Da im K_n jeder Knoten mit jedem verbunden ist, findet man bis zum n.ten Knoten immer einen "tieferen" Nachfolger. Man kann mit der Tiefensuche in keine Sackgasse geraten. Jeder so gefundene Spannbaum ist also ein Pfad.