Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 15
Computergraphik & Visualisierung
Prof. Dr. Rüdiger Westermann
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2007/08
Lösungsblatt 9
11. Januar 2008

Diskrete Strukturen

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass jeder Baum $T = (V, E)$ mit $|V| > 2$ und $deg(v) \neq 2$ für alle $v \in V$ einen Knoten v_0 enthält, der zu mindestens 2 Blättern benachbart ist. Dabei bezeichnet $deg(v)$ den Grad von v.
Hinweis: Enfernen Sie die Blätter eines Baumes.

Lösungsvorschlag

Bäume, die nur aus Blättern bestehen, also keine innere Knoten enthalten, besitzen höchstens 2 Knoten und brauchen wegen $|V| > 2$ nicht betrachtet zu werden.

Daraus folgt, dass T einen inneren Knoten v (d. h. einen Knoten v, der kein Blatt ist) besitzt. Durch Entfernen der Blätter von T konstruieren wir den Baum T'. T' ist nicht leer, weil $v \in T'$ gilt.

Wählen wir nun in T' ein beliebiges Blatt v_0 aus, dann ist v_0 in T ein innerer Knoten und hat wegen $deg(v) \neq 2$ den Grad $deg(v_0) \geq 3$. Da v_0 in T' ein Blatt ist (also in T' den Grad 1 hat), muss es zwei Blätter u_1, u_2 in T geben, die zu v_0 benachbart sind.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Wir nennen einen Graphen mit mindestens 4 Knoten "fast-4-regulär", wenn alle Knoten vom Grad 4 sind außer 4 Knoten, die vom Grad 2 sind.
Wir betrachten im Folgenden bipartite Graphen $G = (A \cup B, E)$ mit $A \cap B = \emptyset$ und $E \subseteq \{\{a, b\} \mid (a, b) \in A \times B\}$.
Man zeige:

1. Es gibt bis auf Isomorphie einen einzigen fast-4-regulären bipartiten Graph G mit 6 Knoten, und dieser Graph ist planar.

2. Für alle $n \geq 1$ gibt es einen planaren, fast-4-regulären bipartiten Graph $G = (A \cup B, E)$ mit $|A| = |B| = 2n$.

   Führen Sie den Beweis durch Induktion über n. Der Induktionsschritt von n auf $n + 1$ kann durch Zeichnung klargemacht werden.

Lösungsvorschlag

1. Es haben 2 Knoten den Grad 4 und 4 Knoten den Grad 2. Die beiden Knoten mit Grad 4 können nicht verteilt in A und B liegen. Sonst müssten sowohl in A als auch in B mindestens je 4 Knoten liegen und damit 8 Knoten existieren.

O. B. d. A. nehmen wir an, dass A genau 2 Knoten enthält, und zwar je vom Grad 4, und B genau 4 Knoten enthält, und zwar je vom Grad 2. Dann ist der Graph ein vollständiger bipartiter Graph $K_{2,4}$.

Wir weisen die Planarität von G durch Zeichnung in der Ebene mit Punkten (x, y) nach und definieren die folgenden Punkte in der Ebene als Knoten:

$$N_1 = (0, 1),\ S_1 = (0, -1), N_1, S_1 \in A \ \text{ und}$$

$$O_1 = (1, 0),\ O_2 = (2, 0),\ W_1 = (-1, 0),\ W_2 = (-2, 0), O_1, O_2, W_1, W_2 \in B\,.$$

Definition der Kanten:

"innere Raute":	"äußere Raute":
$\{N_1, O_1\},\ \{N_1, W_1\}$	$\{N_1, O_2\},\ \{N_1, W_2\}$
$\{S_1, O_1\},\ \{S_1, W_1\}$	$\{S_1, O_2\},\ \{S_1, W_2\}$

(1 Pkt.)

2. Wir konstruieren für alle $n \geq 1$ den Graph G_n induktiv wie folgt. Zunächst definieren wir für alle $n \geq 1$

   $$N_n = (0, n),\ S_n = (0, -n) \text{ und } \ O_n = (n, 0),\ W_n = (-n, 0)\,.$$

   und setzen die Knotenmengen
   $A_n = \{N_1, S_1, N_2, S_2, \ldots, N_n, S_n\}$ und $B_n = \{O_1, W_1, O_2, W_2, \ldots, O_n, W_n\}$

   Für $n = 1$ sei G_1 die "innere Raute":
   $\{N_1, O_1\},\ \{N_1, W_1\}$
   $\{S_1, O_1\},\ \{S_1, W_1\}$

   Die Kantenmengen werden induktiv im Schritt von n auf $n + 1$ wie folgt definiert.
   Für $n + 1$ sei die "äußere Raute":
   $\{N_{n+1}, O_{n+1}\},\ \{N_{n+1}, W_{n+1}\}$
   $\{S_{n+1}, O_{n+1}\},\ \{S_{n+1}, W_{n+1}\}$
   und die Verbindung der äußeren Raute zu G_n:
   $\{N_n, O_{n+1}\},\ \{N_n, W_{n+1}\}$
   $\{S_n, O_{n+1}\},\ \{S_{n+}, W_{n+1}\}$

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Man zeige:

1. Jeder Graph mit Gradfolge 5,4,4,4,3,2,2 ist zusammenhängend.
2. Jeder zusammenhängende Graph enthält einen Knoten, den man entfernen kann, ohne dass der Graph in mehrere Zusammenhangskomponenten zerfällt.
3. Jeder Baum ist bipartit.
4. Jeder k-reguläre Graph mit $k \geq 2$ enthält einen Kreis.

Lösungsvorschlag

1. Von den 7 Knoten sind bereits 6 zusammenhängend, weil ein Knoten x vom Grad 5 existiert. Wäre der Graph nicht zusammenhängend, dann müsste er einen isolierten Knoten enthalten, d. h. es müsste der Grad 0 in der Gradfolge vorkommen. Dies aber ist nicht der Fall.

2. Ein besonders einfacher Weg, einen Knoten w mit den gewünschten Eigenschaften zu finden, ist eine Tiefensuche mit Erzeugung eines zugehörigen Spannbaums. Wir behaupten, dass jedes Blatt eines solchen Baums als w geeignet ist.

   Werde w mit all seinen adjazenten Kanten aus dem Graphen (bzw. dem Spannbaum) entfernt. Da w ein Blatt eines Spannbaums des (zusammenhängenden) Graphen ist, bedeutet dies, dass nur eine einzige Kante des Spannbaums entfernt wird. Alle übrigen mit w adjazenten Kanten können nicht ebenfalls Kanten des gleichen Spannbaums sein. In dem restlichen Spannbaum bleiben also alle Knoten bis auf w erreichbar.

3. Für bipartite Graphen $G = (V, E)$ haben wir in der Vorlesung eine genauere Schreibweise eingeführt. Danach schreiben wir $G = (A, B, E)$, wobei $A \cup B = V$ und $A \cap B = \emptyset$ gilt und weder innerhalb A noch innerhalb B Kanten aus E verlaufen können. Alle Kanten verbinden stets Elemente aus A mit Elementen aus B.

   Wir bauen, ausgehend von einem Baum $G = (V, E)$, induktiv zwei derartige Knotenmengen A und B auf, so dass alle Kanten nicht innerhalb von A und nicht innerhalb von B verlaufen.

   Wir wählen einen beliebigen Startknoten s und setzen $\{s\} = A$, sowie $B = \emptyset$. Alle Nachfolger von s werden in die Menge B aufgenommen. Der damit konstruierte induzierte Teilgraph ist offenbar bipartit.

   Falls es einen Knoten $x \in B$ gibt, der einen Nachbarn hat, der noch nicht in $A \cup B$ enthalten ist, wird x ausgewählt und sämtliche Nachbarn von x werden in A aufgenommen. Der damit konstruierte induzierte Teilgraph ist wiederum bipartit.

   Der letzte Schritt wird mit jeweils vertauschten Rollen von A und B wiederholt bis alle Knoten entweder in A oder in B enthalten sind.

4. Ein kreisfreier Graph ist ein Wald, d. h. eine disjunkte und nicht zusammenhängende Summe von Bäumen. Da jeder Baum mindestens zwei Blätter enthält, gibt es einen Knoten vom Grad 1. Der Graph kann also nicht k-regulär sein für $k \geq 2$, denn das würde bedeuten, dass jeder Knoten den Grad k besitzt.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

1. Geben Sie die Gradfolge des resultierenden Spannbaumes an, der entsteht, wenn man den vollständigen bipartiten Graph $K_{n,n}$ mit dem Algorithmus DFS der Tiefensuche durchsucht.

   Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Gegeben sei der Baum $B = ([8], \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{6,3\},\{7,2\},\{8,2\}\})$. Bestimmen Sie den Prüfer-Code von B.

3. Geben Sie (zeichnerisch) den Baum an, der durch den Prüfer-Code 2,3,4,3,2 dargestellt wird.

4. An welcher charakteristischen Eigenschaft des Prüfer-Codes erkennt man, ob der dargestellte Baum ein Pfad ist?

Lösungsvorschlag

1. Es gibt $2n$ Knoten v_i in $K_{n,n}$. Der Spannbaum, den man mit Tiefensuche erhält, ist ein einfacher Pfad, weil ohne zurückzugehen stets ein neuer Knoten besucht werden kann, so lange unbesuchte Knoten vorhanden sind.

   Die Knotengrade sind alle 2 bis auf die 2 Endknoten mit Knotengrad 1. Nimmt man die Knoten v_i schon als geeignet geordnet an, so gilt

   $(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_{n-2}), d(v_{n-1}, d(v_n)) \;=\; (2, 2, \ldots, 2, 1, 1)\,.$

2. Prüfer-Code: 243322

3. Der dargestellte Baum ist

   $B \;=\; ([7], \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,6\},\{2,7\}\})\,.$

4. Sei ein Prüfer-Code A gegeben durch eine Folge von $n-2$ Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$. Dann stellt A einen Pfad mit n Knoten dar genau dann, wenn die a_i paarweise verschieden sind.

Hinweis: *Die im Folgenden als* Vorbereitung *bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.*

Vorbereitung 1

Seien $n, k \in \mathbb{N}$. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Knoten eines Baumes mit n Knoten so mit k Farben zu färben, dass keine zwei Nachbarn dieselbe Farbe haben?

Lösungsvorschlag

Es gibt $k \cdot (k-1)^{n-1}$ Möglichkeiten.
Das kann man sich leicht so überlegen: Man beginnt mit der Färbung eines beliebigen Knotens, färbt dann dessen Naxchbarn, dann deren Nachbern, usw.. Für den ersten Knoten hat man k Farben zur Auswahl, für jeden weiteren Knoten hat man $k-1$ Knoten zur Auswahl, da er genau einen Nachbarn hat, der bereits gefärbt ist.

Vorbereitung 2

1. Geben Sie einen nicht-planaren Graphen an mit chromatischer Zahl $\chi(G) \leq 2$)!

2. Zeigen Sie, dass jeder Graph mit chromatischer Zahl 5 nicht planar ist.

Lösungsvorschlag

1. Wenn der Graph 2-färbbar sein soll, muss er bipartit sein. Wir wissen aber aus der Vorlesung, dass der bipartite $K_{3,3}$ schon nicht mehr planar ist. Er ist aber 2-färbbar.

2. Wir verwenden den Vierfarbensatz, nach dem jeder planare Graph eine chromatische Zahl ≤ 4 hat. Damit kann ein beliebiger Graph mit chromatischer Zahl 5 nicht planar sein.

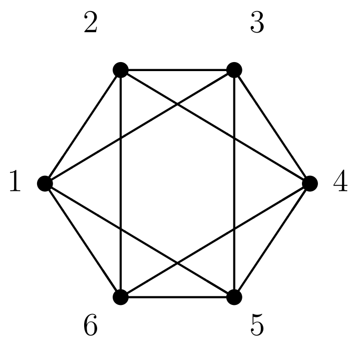
Vorbereitung 3

Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade und $G = (V, E)$ ein $(n-2)$-regulärer Graph mit n Knoten.

1. Geben Sie mit $n = 6$ ein Beispiel für G an.

2. Zeigen Sie für alle geraden $n \in \mathbb{N}$, dass für die chromatische Zahl $\chi(G)$ gilt $\chi(G) = \frac{n}{2}$.

Lösungsvorschlag

1. 

2. Zu jedem Knoten x gibt es genau einen Knoten y, mit dem x nicht verbunden ist.

   G läßt sich also in $\frac{n}{2}$ Klassen mit je 2 unverbundenen Knoten partitionieren.

   Da die Knoten in einer Klasse zulässig gleich gefärbt werden können, können alle Knoten zulässig mit $\frac{n}{2}$ Farben gefärbt werden.

   Umgekehrt ist jeder Knoten x mit jedem Knoten verbunden, der nicht aus derselben Klasse wie x stammt.

   Alle Klassen müssen also verschieden gefärbt sein, d.h. wir benötigen notwendigerweise $\frac{n}{2}$ Farben für eine zulässige Färbung.

Tutoraufgabe 1

1. Wie viele nichtleere Matchings besitzt ein Kreis C_n ? Begründung!

2. Sei $G_n = ([n], E)$ der Graph mit $\{i, j\} \in E$ genau dann wenn $i|j$ oder $j|i$.

   (a) Hat G_{10} ein perfektes Matching? Begründung!

   (b) Hat G_8 ein perfektes Matching? Begründung!

3. Beweisen Sie die folgende Eigenschaft perfekter Matchings M_1 und M_2 eines Graphen G:

   > Falls M_1 und M_2 verschieden (ungleich) sind, dann enthält die symmetrische Mengendifferenz $M_1 \Delta M_2 = (M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1)$ mindestens die Kanten eines Kreises in G.

Lösungsvorschlag

1. 10

2. (a) Ja. $M = \{\{1, 7\}, \{2, 6\}, \{3, 9\}, \{4, 8\}, \{5, 10\}\}$

   (b) Nein. Die Knoten 5 und 7 sind beide nur mit 1 verbunden. Damit überdeckt ein Matching maximal einen der beiden Knoten.

3. Der Beweis erfolgt in drei Schritten.

   (1) Da M_1 und M_2 nicht gleich sind, gibt es mindestens eine Kante aus $M_1 \Delta M_2$, d. h. es gibt einen Pfad (u_0, u_1) mit verschiedenen Knoten u_0, u_1 und verbindender Kante x aus $M_1 \Delta M_2$.

   (2) Jeder Pfad $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ mit paarweise verschiedenen Knoten $u_0, u_1, \ldots, u_n$, und verbindenden Kanten aus $M_1 \Delta M_2$ lässt sich mit einer Kante $x \in M_1 \Delta M_2$ zu einem Pfad oder zu einem Kreis verlängern.

   Beweis: Der Endknoten u_n eines Pfades mit paarweise verschiedenen Knoten und Kanten aus $M_1 \Delta M_2$, ist inzident sowohl mit einer Kante $x \in M_1$ als auch mit einer Kante $y \in M_2$, weil beide Matchings als perfekt vorausgesetzt wurden.

   Entweder x oder y ist bereits im Pfad.
   Sei $x \in M_1$ bereits im Pfad, also $x \in M_1 \Delta M_2$, o. B. d. A. .

   Dann aber gilt $y \notin M_1$, d. h. $y \in M_1 \Delta M_2$.
   Andernfalls hätten 2 Kanten aus M_1 einen gemeinsamen Knoten im Widerspruch zur Matching Eigenschaft.

   Verlängert man nun den Pfad um y, so entsteht wieder ein Pfad oder ein Kreis.

   (3) Da G nur endlich viele Knoten besitzt, muss die Pfadverlängerung mit einem Kreis enden.

Tutoraufgabe 2

1. Beweisen Sie: Ein Graph mit chromatischer Zahl 3 enthält einen Kreis ungerader Länge.
2. Beweisen Sie: Jeder k-reguläre bipartite Graph G hat den chromatischen Index $\chi'(G) = k$. (Mit anderen Worten: er besitzt eine Kantenfärbung mit k Farben, so dass je zwei inzidente Kanten verschieden gefärbt sind.)

Lösungsvorschlag

1. Nehmen wir an, der Graph hätte keinen Kreis ungerader Länge. Dann können wir ihn mit folgender (Greedy-) Strategie mit 2 Farben färben. Wir starten an einem beliebigen Knoten v_0 in einer beliebigen Zusammenhangskomponente. Dieser Knoten bekommt die Farbe 1. Alle über eine Kante mit dem Startknoten verbundenen Knoten bekommen die Farbe 2. Dies ist immer eine gültige Färbung, da paarweise zwischen diesen Knoten keine Kante liegen darf (sonst gäbe es einen Kreis ungerader Länge). Wir gehen analog weiter, indem alle weiteren benachbarten ungefärbten Knoten wieder Farbe 1 bekommen.
   Wir betrachten die Knotenmenge V_1 der mit Farbe 1 neu eingefärbten Knoten (analog für Farbe 2 V_2) und nennen die Gesamtmenge der schon gefärbten Knoten V_f. Wir konstruieren dann die Menge aller noch ungefärbten Nachbarknoten von V_1 bzw. V_2. Der Färbealgorithmus sieht folgendermaßen aus, und er wird für jede Zusammenhangskomponente des Graphen an einem beliebigen Startknoten v_0 gestartet:

$$\begin{array}{rcl} V_f & := & \{v_0\} \\ V_1 & := & \{v_0\} \\ & & \text{Färbe } v_0 \text{ mit Farbe 1} \\ \text{repeat} & & \\ V_2 & := & \Gamma(V_1) \setminus V_f \\ V_f & := & V_f \cup V_2 \\ & & \text{Färbe alle } v \in V_2 \text{ mit Farbe 2} \\ V_1 & := & \Gamma(V_2) \setminus V_f \\ V_f & := & V_f \cup V_1 \\ & & \text{Färbe alle } v \in V_1 \text{ mit Farbe 1} \\ \text{until} & & V_1 = \oslash \end{array}$$

   Dieser Algorithmus berechnet eine gültige 2-Färbung der Graphen, der nach Annahme keine ungeraden Kreise enthält.

   Überprüfen der Korrektheit:
   Nach Konstruktion existiert für jeden Knoten $v_i \in V_k$, $k \in \{1, 2\}$, ein Pfad zum Startknoten v_0, und damit kann es keine 2 Knoten $v_i \in V_k, v_j \in V_k, i \neq j$ geben, die durch eine Kante verbunden sind (sonst würden diese über v_0 einen Kreis ungerade Länge bilden).

Damit haben wir einen Widerspruch zur Vorrausetzung, dass der Graph chromatische Zahl 3 hat. Also gilt die Behauptung.

2. Wir stellen zunächst fest, dass wir mindestens k Farben für eine Kantenfärbung benötigen, da der Graph k-regulär ist (also jeder Knoten Grad k hat). Das k Farben reichen, ist im Allgemeinen noch nicht klar, wie das Beispiel eines Dreiecks zeigt. Jeder Knoten hat Grad 2, aber man braucht 3 Farben für einen Kantenfärbung. Zusätzlich ist in der Aufgabe gegeben, dass der Graph bipartit ist ($V = V_1 \uplus V_2$). Also haben wir $k \cdot |V_1|$ Kanten, die aus der Knotenmenge V_1 ausgehen und entsprechend $k \cdot |V_2|$ Kanten, die aus der Knotenmenge V_2 ausgehen. Damit muss $|V_1| = |V_2|$ gelten.

   Wir zeigen nun mit Induktion über k, dass man jeden k-regulären bipartiten Graphen mit k Farben (Kanten-) färben kann.

   Induktionsanfang:
   Für $k = 1$ ist die Behauptung leicht einzusehen, denn jede Kante kann die gleich Farbe bekommen, da keine zwei Kanten denselben Knoten inzident haben können.

   Induktionsschritt $k \to k + 1$:
   Wir nehmen an, dass die Behauptung für k gilt (**Induktionsannahme**). Betrachten wir den $(k + 1)$-regulären bipartiten Graphen. Jede Knotenteilmenge $X \subseteq V_1$ hat $(k+1)|X|$ ausgehende Kanten. Damit muss die Menge der Nachbarknoten von X, bezeichnet als $\Gamma(X)$, mindestens Kardinalität $|X|$ haben (folgt aus der $(k + 1)$-Regularität: Gäbe es weniger Knoten, dann folgert man mit Schubfachprinzip, dass mind. ein Knoten Grad $(k + 2)$ haben muss!). Damit ist die Bedingung des "Heiratssatzes" (Satz von Hall) gegeben, und wir wissen, dass der Graph ein perfektes Matching hat. Alle Kanten des Matching können die gleiche Farbe $k + 1$ erhalten (Definiton eines Matchings). Da $|V_1| = |V_2|$, überdeckt das Matching außerdem alle Knoten. Entfernen wir daher alle Matchingkanten, reduziert sich der Grad jedes Knotens um 1, und wir erhalten einen k-regulären Graphen, der nach Induktionsannahme k-färbbar ist. Da wir nur eine weitere Farbe zum Färben der Matchingkanten brauchen, ist der $k + 1$-reguläre Graph also mit $k + 1$ Farben kantenfärbbar.