Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 15
Computergraphik & Visualisierung
Prof. Dr. Rüdiger Westermann
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2007/08
Übungsblatt 10
9. Februar 2008

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 18. Januar **vor** *der Vorlesung*

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:

1. In jedem planaren Graphen gibt es einen Knoten der höchstens Grad 5 hat.
2. Es gibt einen 5-regulären planaren Graphen.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:

1. Jeder 3-reguläre Graph mit Hamiltonkreis hat chromatischen Index 3.
2. Die chromatische Zahl eines k-regulären Graphen (V, E) ist mindestens $\left\lceil \frac{|V|}{|V|-k} \right\rceil$.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Wir betrachten $[4]$ als linear geordnete Knotenmenge eines Suchbaumes B.

1. Listen Sie alle möglichen Suchbäume mit $[4]$ als Knotenmenge auf.
2. Wie viele Knoten muß der kleinste vollständige Suchbaum enthalten, der alle Knoten von B enthält?

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Konstruieren Sie jeweils einen Algorithmus, der bestimmt, ob ein beliebig gegebener Graph $G = (V, E)$ ein Baum ist, basierend auf

1. Tiefensuche,
2. Breitensuche.

Hausaufgabe 5 (0 Punkte)

Wahr oder falsch?

– – Es gibt keinen Baum ohne Blätter! – –

Hinweis: *Die im Folgenden als* Vorbereitung *bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.*

Vorbereitung 1

Die Komposition $f \circ g$ von Abbildungen f und g ist durch $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ definiert. Dies gilt insbesondere für Permutationen einer Menge $[n]$. Die Menge der Permutationen von $[n]$ zusammen mit der Komposition $\circ$ bildet eine Algebra, die wir bekanntlich die Symmetrische Gruppe S_n nennen.

Wir betrachten die folgenden Permutationen q, r, s aus S_5

$$q = (15)\,, \qquad r = (321)\,, \qquad s = (3452)\,.$$

q, r, s sind hier in der Zyklenschreibweise angegeben, wobei Zyklen der Länge 1 weggelassen wurden. Beispielweise gilt $q(1) = 5$ und $q(3) = 3$.
Sei

$$p = q \circ r \circ s\,.$$

1. Geben Sie p als Liste von Paaren $(x, p(x))$ an.
2. Geben Sie p als Komposition von disjunkten zyklischen Permutationen an.

   Hinweis: Permutationen $s \in S_n$ und $t \in S_n$ heißen disjunkt, falls für alle $x \in [n]$ gilt $s(x) = x$ oder $t(x) = x$.

Vorbereitung 2

Berechnen Sie

$$\text{(i)} \quad x = 17 \bmod 3\,, \qquad \text{(ii)} \quad y = 3^{20} \bmod 4\,, \qquad \text{(iii)} \quad z = (-30) \bmod 7\,.$$

Tutoraufgabe 1

Gegeben ist die folgende Entfernungstabelle. Ein Strich (" -") bedeutet, dass keine direkte Verbindung zwischen den Städten angenommen wird. Andernfalls ist die Entfernung in Kilometern angegeben.

	Dortmund	Frankfurt	Karlsruhe	Kassel	Köln	Nürnberg	Mannheim	München	Stuttgart	Ulm
Dortmund	-	-	-	165	83	-	-	-	-	-
Frankfurt	-	-	-	-	189	228	88	-	-	294
Karlsruhe	-	-	-	-	-	-	68	-	82	-
Kassel	165	-	-	-	-	-	-	-	-	465
Köln	83	189	-	-	-	-	-	-	-	-
Nürnberg	-	228	-	-	-	-	-	167	-	-
Mannheim	-	88	68	-	-	-	-	-	-	-
München	-	-	-	-	-	167	-	-	-	139
Stuttgart	-	-	82	-	-	-	-	-	-	92
Ulm	-	294	-	465	-	-	-	139	92	-

1. Zeichnen Sie den zu der Entfernungstabelle gehörigen (ungerichteten) gewichteten Graphen.
2. Bestimmen Sie nach dem Algorithmus von Dijkstra die Entfernung von München nach Köln.
3. Wie müssen Sie den Algorithmus von Dijkstra modifizieren, damit Sie den kürzesten Weg von München nach Köln als Resultat erhalten?

Tutoraufgabe 2

Wir betrachten Algebren $A = \langle S, \circ \rangle$ mit einer 4-elementigen Trägermenge S und einer Operation $\circ$, die die folgende (2-seitige) Kürzungsregel erfüllt für alle $x, x', y \in S$

$$x \circ y = x' \circ y \;\Rightarrow\; x = x' \quad \wedge \quad y \circ x = y \circ x' \;\Rightarrow\; x = x' .$$

Wir fordern außerdem, dass alle "Quadrate" von Elementen aus A (d. h. aus S) rechtsneutral (rechtes Einselement) sind, d. h., dass für alle $x, y \in S$ gilt

$$y \circ (x \circ x) = y .$$

1. Zeigen Sie die Existenz eines eindeutigen rechten Einselements in A, i. Z. $1_r \in A$.
2. Wir nehmen an, dass 1_r auch linkes Einselement ist, und können in diesem Fall 1 schreiben für 1_r. Geben Sie für diesen Fall eine Verknüpfungstafel für $\circ$ an!

   Machen Sie sich zunächst klar, was die (2-seitige) Kürzungsregel für die Elemente der Spalten bzw. Zeilen der Verknüpfungstafel bedeutet.

3. Wir nehmen nun an, dass 1_r nicht auch linksneutral (linkes Einselement) ist.
   (a) Geben Sie für diesen Fall eine Verknüpfungstafel für $\circ$ an!
   (b) Zeigen Sie die Eindeutigkeit der Verknüpfungstafel bis auf Isomorphie!
   (c) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung $\circ$ nicht assoziativ und die Algebra A damit keine Halbgruppe ist!
4. Besitzt A in jedem Fall eine echte Unteralgebra? Begründung!