Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 15
Computergraphik & Visualisierung
Prof. Dr. Rüdiger Westermann
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2007/08
Übungsblatt 12
9. Februar 2008

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 29. Januar **vor** *der Vorlesung*

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Wir betrachten die Menge $S = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und definieren eine Abbildung $\diamond$ für alle $x, y \in S$ mit

$$x \diamond y = x + y - xy.$$

Zeigen Sie, dass durch $A = \langle S, \diamond \rangle$ eine Gruppe definiert ist.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $G = \langle S, \circ \rangle$ eine Gruppe, die ein Element $a \in S$ endlicher Ordnung enthält.

1. Zeigen Sie, dass es ein k gibt, so dass $a^{-1} = a^k$ gilt.
2. Wir schreiben $\mathrm{ord}(x)$ für die Ordnung eines Elementes x. Welche Beziehung besteht zwischen $\mathrm{ord}(a)$ und $\mathrm{ord}(a^{-1})$?
3. Zeigen Sie, dass G nicht notwendigerweise eine endliche Ordnung besitzt.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Geben Sie alle Untergruppen der folgenden Gruppen an.

1. $\langle \mathbb{Z}_{12}, +_{12} \rangle$.
2. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$.

Welche der betrachteten Untergruppen sind zyklisch? Begründung!

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Begründen Sie Ihre Antwort auf die folgenden Fragen.

1. Wie viele Elemente und wie viele Atome besitzt die Boolesche Potenzmengenalgebra $\langle \mathcal{P}([5]), \cap, \cup, \overline{} \rangle$?
2. Stellen Sie die Boolesche Algebra $\langle \{T, F\}, \wedge, \vee, \neg \rangle$ isomorph als Potenzmengenalgebra dar.
3. Wie viele Atome besitzt eine Boolesche Algebra mit 128 Elementen?

Hinweis: *Die im Folgenden als* Vorbereitung *bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.*

Vorbereitung 1

1. Zeigen Sie, dass gilt $\{(7k) \bmod 12 \mid k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Z}_{12}$.

2. Welche Ordnung besitzt 11 in $\langle \mathbb{Z}_{12}, +_{12} \rangle$? Beweis!

Vorbereitung 2

Im Folgenden nehmen wir 0 bzw. 1 als die entsprechenden neutralen Elemente bezüglich $+$ bzw. $\cdot$ in die Signatur von Ringen mit auf.
Man zeige:

1. In einem beliebigen Ring $\langle R, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ gelten die folgenden Gleichungen.

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= 0 \cdot a = 0\,, \\ a \cdot (-b) &= (-a) \cdot b = -a \cdot b\,. \end{aligned}$$

2. Es gibt bis auf Isomorphie genau einen Ring $R = \langle S, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ mit drei Elementen, d. h. $S = \{0, 1, a\}$. Insbesondere muß also R isomorph sein zum Ring $\langle \mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3, 0, 1 \rangle$.

3. Der Ring $R = \langle S, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ mit drei Elementen ist ein Körper.

Vorbereitung 3

Sei $p(x) = 3x^4 - 4x^2 - 5x + 10$. Bestimmen Sie p an der Stelle -1 mit dem Hornerschema, d. h., werten Sie $p(-1)$ mit dem Hornerschema aus.

Tutoraufgabe 1

1. Die Charakteristik eines Körpers K, i. Z. $char(K)$, ist definiert als die Ordnung des Elements 1 in der additiven Gruppe von K. Man zeige:

$$p = char(K) \in \mathbb{N} \Rightarrow p \text{ ist eine Primzahl}\,.$$

2. Geben Sie die Verknüpfungstafeln eines Körpers mit 4 Elementen an. Welche Charakteristik hat dieser Körper?

   Begründen Sie Ihre Angaben!

Tutoraufgabe 2

Wir betrachten Polynome $p(x), q(x) \in \mathbb{Q}[x]$, d. h. Polynome p, q in einer Unbestimmten (Variablen) x und Koeffizienten aus dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen mit

$$\begin{aligned} p(x) &= x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 2x - 6\,, \\ q(x) &= x^3 + 3x^2 + x + 3\,. \end{aligned}$$

Berechnen Sie mit dem (erweiterten) Euklidschen Algorithmus ein Polynom möglichst hohen Grades, das sowohl Teiler von $p(x)$ als auch Teiler von $q(x)$ ist ($ggT(p, q)$).

Tutoraufgabe 3

Sei $\pi(x) = x^3 + 1$. Wir betrachten den Ring $R = \langle \mathbb{Z}_2[x]_{\pi(x)}, +_{\pi(x)}, \cdot_{\pi(x)} \rangle$. Seine Elemente werden repräsentiert durch die Reste bei Polynomdivision durch $x^3 + 1$.

1. Geben Sie die Menge aller Elemente von R an.

2. Wir betrachten das Element $a = x^2 \in \mathbb{Z}_2[x]_{\pi(x)}$. Bestimmen Sie die Zeile der Multiplikationstafel des Ringes R, die für alle $b \in \mathbb{Z}_2[x]_{\pi(x)}$ die Produkte $a \cdot_{\pi(x)} b$ auflistet.

3. Geben Sie die Menge der Nullteiler in R an.

   Hinweis: $p \in Z_2[x]_{\pi(x)}$ mit $\text{grad}(p) \neq 0$ heißt Nullteiler, falls es ein $q \in Z_2[x]_{\pi(x)}$ mit $\text{grad}(q) \neq 0$ gibt, so dass gilt $p \cdot_{\pi(x)} q = 0$.