Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 15
Computergraphik & Visualisierung
Prof. Dr. Rüdiger Westermann
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2007/08
Übungsblatt 2
9. Februar 2008

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 6. November **vor** *der Vorlesung*

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Beantworten Sie die Frage, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind entsprechend mit Ja bzw. Nein. Bei dem Begriff „gleich groß“ beziehen wir uns auf Übungsblatt 1.

1. Es gibt verschiedene Primzahlen p und q mit $ggT(p,q) = 17$!?
2. Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$ sind „gleich groß“ !?
3. Es gibt „mehr“ Brüche als rationale Zahlen !?
4. Es gibt eine reelle Zahl $x > 1$, für die sowohl $x^{\frac{1}{2}}$ als auch $x^{\frac{1}{3}}$ rationale Zahlen sind !?
5. Die Mengen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ sind „gleich groß“ !?

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Beweisen Sie die Assoziativität des Bikonditional $\Leftrightarrow$, d. h.

$$(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z \;\equiv\; x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z)\,,$$

1. durch Verwendung von Wahrheitstabellen!
2. durch Fallunterscheidung, indem Sie gesondert $y = T$ bzw. $y = F$ betrachten und jeweils mit Äquivalenzregeln vereinfachen!

Berechnen Sie für alle x, y, z den Ausdruck

$$((x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z) \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z))\,.$$

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Widerlegen Sie:

1. Falls A keine Tautologie ist, dann ist A eine Kontradiktion.
2. $((x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z) \;\equiv\; (x \Leftrightarrow y) \wedge (y \Leftrightarrow z)\,.$

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Zeigen Sie durch Anwendung von Äquivalenzregeln die sogenannte „goldene Regel“

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow p \;\equiv\; q \Leftrightarrow (p \vee q)\,.$$

Hinweis: *Die im Folgenden als* Vorbereitung *bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.*

Vorbereitung 1

Es wird erzählt, dass in einem kleinen Dorf in Bayern ein alter Barbier lebt, der genau alle diejenigen Männer im Dorf rasiert, die sich nicht selbst rasieren.
Warum ist die Frage nach dem Alter des Barbiers sinnlos?
Leiten Sie rein logisch her, dass der Barbier nicht existieren kann!
Versuchen Sie, den Sachverhalt prädikatenlogisch zu formalisieren und weisen Sie nach, dass die Erzählung eine Lüge enthält!

Vorbereitung 2

Was versteht man unter dem „Modus Ponens“?
Geben Sie ein einfaches Beispiel für die Anwendung einer Inferenzregel!

Vorbereitung 3

Es seien $m, n, k \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen mit $m > n \cdot k$. Zeigen Sie:

> Verteilt man m Bälle auf n Schubladen, so befinden sich in mindestens einer Schublade $k + 1$ oder mehr Bälle.

Führen Sie einen informellen, aber präzisen Beweis, indem Sie annehmen, in allen Schubläden würden sich nach einer Verteilung weniger als $k + 1$ Bälle befinden.

Tutoraufgabe 1

In dieser Aufgabe interpretieren wir Prädikate informell in natürlicher Sprache. Im späteren Verlauf der Vorlesung werden wir die Interpretation durch Mengen und Relationen abstrakt einführen.

1. Definieren Sie ein geeignetes Prädikat $P(x, y)$, so dass gleichzeitig die beiden folgenden Formeln gelten.

$$(\neg\exists x)(\forall y)(P(x, y)) \quad \text{und} \quad (\forall y)(\exists x)(P(x, y))\,.$$

2. Widerlegen Sie:

$$(\exists x\ \forall y)(Q(x, y)) \quad \equiv \quad (\forall y\ \exists x)(Q(x, y))\,.$$

3. Geben Sie eine zu $(\neg\exists x)(\forall y)(P(x, y))$ äquivalente prädikatenlogische Formel an, in der der Verneinungsoperator $(\neg)$ nicht links neben einem logischen Quantor vorkommt.

Tutoraufgabe 2

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion

1. die Gleichung

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,,$$

2. die Aussage in der Vorbereitungsaufgabe 3.