Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 15
Computergraphik & Visualisierung
Prof. Dr. Rüdiger Westermann
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2007/08
Übungsblatt 8
9. Februar 2008

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 18. Dezember **vor** *der Vorlesung*

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Gegeben sei der Graph

$$G = (\{a, b, c, d, e, f, g, h\}, \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, d\}, \{c, h\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{g, h\}\}) .$$

Stellen Sie für den Graph G

1. die Inzidenzmatrix und
2. die Adjazenzmatrix auf.
3. Welche Zusammenhangskomponenten hat G?
4. Zeichnen Sie eine graphische Darstellung von G.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Beweisen Sie: In jedem eulerschen Graphen gibt es ein System von Kreisen $C_1, \ldots, C_r$, so dass jede Kante des Graphen genau einmal in einem Kreis liegt.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Beweisen Sie: Ein planarer dreiecksfreier Graph besitzt einen Knoten vom Grad höchstens 3. Dabei heißt ein Graph dreiecksfrei, wenn er keinen K_3 als Teilgraph enthält.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph mit mindestens 4 Knoten, und der Grad der Knoten sei größer oder gleich 3 für alle Knoten.
Beweisen Sie: Es gibt mindestens 4 Knoten vom Grad höchstens 5.

Hinweis: *Die im Folgenden als* Vorbereitung *bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.*

Vorbereitung 1

Die absteigende Gradfolge eines Graphen G mit Knotenmenge $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ist definiert als die Folge der in absteigender Reihenfolge angeordneten Knotengrade $\mathrm{d}(v_i)$.

1. Gibt es Graphen zu folgenden Gradfolgen?

   i) $2, 1, 0\,.$ ii) $3, 3, 3, 3, 2, 2\,.$ iii) $3, 3, 3, 2, 2, 2\,.$

2. Beweisen oder widerlegen Sie:
   i) Zwei isomorphe Graphen haben die gleiche Gradfolge.
   ii) Zwei Graphen, die die gleiche Gradfolge haben, sind isomorph.

Vorbereitung 2

Wahr oder falsch?
Jeder Baum $T = (V, E)$ mit $deg(v) \neq 2$ für alle $v \in V$ und $|V| \geq 2$ einen Knoten v_0 enthält, der zu mindestens 2 Knoten benachbart ist. Dabei bezeichnet $deg(v)$ den Grad von v.

Tutoraufgabe 1

Beweisen oder widerlegen Sie mit Hilfe des Satzes von Kuratowski die folgenden Aussagen.

1. Es ist möglich, drei Häuser mit Strom, Gas und Wasser zu versorgen, wenn die Leitungen alle ebenerdig verlaufen müssen und sich nicht schneiden dürfen.
2. Wenn man zu einem beliebigen Baum $G = (V, E)$ einen neuen Knoten v hinzufügt und v mit allen Knoten in V verbindet, so ist der entstehende Graph planar.
3. Entfernt man aus dem $K_{3,3}$ eine beliebige Kante, dann ist der entstehende Graph planar.

Tutoraufgabe 2

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

1. G ist ein Baum.
2. G ist maximal kreisfrei. Das bedeutet, dass G kreisfrei ist und es für jede Kante $e \in \{\{v_1, v_2\};\ v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2\} \setminus E$ im Graph $(V, E \cup \{e\})$ einen Kreis gibt.
3. G ist minimal zusammenhängend. D. h., G ist zusammenhängend und für jede Kante $e \in E$ ist der Graph $(V, E \setminus \{e\})$ nicht zusammenhängend.

Tutoraufgabe 3

1. Gegeben seien die Bäume

   $B_1 = ([9], \{\{1, 9\}, \{2, 7\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}, \{8, 3\}, \{6, 7\}, \{7, 9\}, \{3, 9\}\})\,,$
   $B_2 = ([9], \{\{2, 1\}, \{1, 7\}, \{5, 7\}, \{4, 1\}, \{7, 3\}, \{9, 3\}, \{6, 4\}, \{8, 4\}\})\,.$

   Bestimmen Sie zu B_1 und B_2 jeweils den Prüfer-Code.
2. Bestimmen Sie zu den folgenden Prüfer-Codes die zugehörigen Bäume.

   i) 77777777, ii) 1212121, iii) 9876543, iv) 82267222.
3. Man zeige: Wenn man den vollständigen Graphen K_n mit beliebigem $n \in \mathbb{N}$ ausgehend von einem beliebigen Knoten mit Tiefensuche (Algorithmus DFS) durchsucht, dann ist der resultierende Spannbaum immer ein einfacher Pfad.