Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 15
Computergraphik & Visualisierung
Prof. Dr. Rüdiger Westermann
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2007/08
Übungsblatt 9
9. Februar 2008

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 11. Januar **vor** *der Vorlesung*

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass jeder Baum $T = (V, E)$, für den $|V| > 2$ und für alle $v \in V$ $deg(v) \neq 2$ gilt, einen Knoten v_0 enthält, der zu mindestens 2 Blättern benachbart ist. Dabei bezeichnet $deg(v)$ den Grad von v.
Hinweis: Enfernen Sie die Blätter eines Baumes.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Wir nennen einen Graphen mit mindestens 4 Knoten "fast-4-regulär", wenn alle Knoten vom Grad 4 sind außer 4 Knoten, die vom Grad 2 sind.
Wir betrachten im Folgenden bipartite Graphen $G = (A \cup B, E)$ mit $A \cap B = \emptyset$ und $E \subseteq \{\{a, b\} \mid (a, b) \in A \times B\}$.
Man zeige:

1. Es gibt bis auf Isomorphie einen einzigen fast-4-regulären bipartiten Graphen G mit 6 Knoten, und dieser Graph ist planar.
2. Für alle $n \geq 1$ gibt es einen planaren, fast-4-regulären bipartiten Graphen $G = (A \cup B, E)$ mit $|A| = |B| = 2n$.

   Führen Sie den Beweis durch Induktion über n. Der Induktionsschritt von n auf $n + 1$ kann durch Zeichnung klargemacht werden.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Man zeige:

1. Jeder Graph mit Gradfolge 5,4,4,4,3,2,2 ist zusammenhängend.
2. Jeder zusammenhängende Graph enthält einen Knoten, den man entfernen kann, ohne dass der Graph in mehrere Zusammenhangskomponenten zerfällt.
3. Jeder Baum ist bipartit.
4. Jeder k-reguläre Graph mit $k \geq 2$ enthält einen Kreis.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

1. Geben Sie die Gradfolge des resultierenden Spannbaumes an, der entsteht, wenn man den vollständigen bipartiten Graphen $K_{n,n}$ mit dem Algorithmus DFS der Tiefensuche durchsucht.

   Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Gegeben sei der Baum $B = ([8], \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{6,3\},\{7,2\},\{8,2\}\})$. Bestimmen Sie den Prüfer-Code von B.

3. Geben Sie (zeichnerisch) den Baum an, der durch den Prüfer-Code 2,3,4,3,2 dargestellt wird.

4. An welcher charakteristischen Eigenschaft des Prüfer-Codes erkennt man, ob der dargestellte Baum ein Pfad ist?

Hinweis: *Die im Folgenden als* Vorbereitung *bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.*

Vorbereitung 1

Seien $n, k \in \mathbb{N}$. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Knoten eines Baumes mit n Knoten so mit k Farben zu färben, dass keine zwei Nachbarn dieselbe Farbe haben?

Vorbereitung 2

1. Geben Sie einen nicht-planaren Graphen an mit chromatischer Zahl $\chi(G) \leq 2$)!

2. Zeigen Sie, dass jeder Graph mit chromatischer Zahl 5 nicht planar ist.

Vorbereitung 3

Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade und $G = (V, E)$ ein $(n-2)$-regulärer Graph mit n Knoten.

1. Geben Sie mit $n = 6$ ein Beispiel für G an.

2. Zeigen Sie für alle geraden $n \in \mathbb{N}$, dass für die chromatische Zahl $\chi(G)$ gilt $\chi(G) = \frac{n}{2}$.

Tutoraufgabe 1

1. Wie viele nichtleere Matchings besitzt ein Kreis C_5 ? Begründung!

2. Sei $G_n = ([n], E)$ der Graph mit $\{i, j\} \in E$ genau dann, wenn $i|j$ oder $j|i$ gilt.

   (a) Hat G_{10} ein perfektes Matching? Begründung!

   (b) Hat G_8 ein perfektes Matching? Begründung!

3. Beweisen Sie die folgende Eigenschaft perfekter Matchings M_1 und M_2 eines Graphen G:

   > Falls M_1 und M_2 verschieden (ungleich) sind, dann enthält die symmetrische Mengendifferenz $M_1 \Delta M_2 = (M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1)$ mindestens die Kanten eines Kreises in G.

Tutoraufgabe 2

1. Beweisen Sie: Ein Graph mit chromatischer Zahl 3 enthält einen Kreis ungerader Länge.

2. Beweisen Sie: Jeder k-reguläre bipartite Graph G hat den chromatischen Index $\chi'(G) = k$. (Mit anderen Worten: er besitzt eine Kantenfärbung mit k Farben, so dass je zwei inzidente Kanten verschieden gefärbt sind.)