Punkteverteilung:

1	2	3	4	Σ

Aufgabe (1)

(a)

$$
\begin{aligned}
G &= F \cap (A \cup B) && \text{Angabe}\\
G &= (E \cup (A \setminus C)) \cap (A \cup B) && \text{F einsetzen}\\
G &= ((D \cap (A \cup B)) \cup (A \setminus C)) \cap (A \cup B) && \text{E einsetzen}\\
G &= (((B \cap (A \cup C)) \cap (A \cap B)) \cup (A \setminus C)) \cap (A \cup B) && \text{D einsetzen}\\
G &= ((B \cap B \cap A \cap (A \cup C)) \cup (A \setminus C)) \cap (A \cup B) && \text{Assoziativität, Kommutivität}\\
G &= ((B \cap A \cap (A \cup C)) \cup (A \setminus C)) \cap (A \cup B) && \text{Idempotenz von } B \cap B\\
G &= ((B \cap A) \cup (A \setminus C)) \cap (A \cup B) && \text{Absorption}\\
G &= (A \cap B) \cup (A \setminus C) \cap (A \cup B) && \text{Kommutivität}\\
G &= (A \cap B) \cap (A \cup B) \cup (A \setminus C) && \text{Kommutivität}\\
G &= (A \cup B) \cap (A \setminus C)
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
A &= \{x, b, 35, x\} = \{x, b, 35\}\\
B &= \{x, b, 2, 3, \delta, x\} = \{x, b, 2, 3, \delta\}\\
C &= \{\alpha, 2, 3, \epsilon\}\\
D &= B \cap (A \cup C) = \{x, b, 2, 3, \delta\} \cap (\{x, b, 35\} \cup \{\alpha, 2, 3, \epsilon\} =\\
&= \{x, b, 2, 3, \delta\} \cap \{x, b, 35, \alpha, 2, 3, \epsilon\} = \{x, b, 2, 3\}\\
E &= D \cap (A \cap B) = \{x, b, 2, 3\} \cap (\{x, b, 35\} \cap \{x, b, 2, 3, \delta\}) =\\
&= \{x, b, 2, 3\} \cap \{x, b\}\\
F &= F \cup (A \setminus C) = \{x, b\} \cup (\{x, b, 35\} \setminus \{\alpha, 2, 3, \epsilon\}) =\\
&= \{x, b\} \cup \{x, b, 35\} = \{x, b, 35\}\\
G &= F \cap (A \cup B) = \{x, b, 35\} \cap (\{x, b, 35\} \cup \{x, b, 2, 3, \delta\}) =\\
&= \{x, b, 35\} \cap \{x, b, 35, 2, 3, \delta\} = \{x, b, 35\}
\end{aligned}
$$

Aufgabe (2)

(a)

$P(A) = \{\emptyset, \{y\}, \{x\}, \{x, y\}, \{w\}\{x, y\}, \{w, x\}, \{w, x, y\}, \{v\}, \{v, y\}, \{v, x\}, \{v, x, y\}, \{v, w\}, \{v, w, y\}, \{v, w, x\}, \{v, w, x, y\}, \{u\}, \{u, y\}, \{u, x\}, \{u, x, y\}, \{u, w\}\{u, w, y\}, \{u, w, x\}, \{u, w, x, y\}, \{u, v\}, \{u, v, y\}, \{u, v, x\}, \{u, v, x, y\}, \{u, v, w\}, \{u, v, w, y\}, \{u, v, w, x\}, \{u, v, w, x, y\}\}$

$|P(A)| = 2^{|A|} = 2^5 = 32$

Der Zusammenhang besteht darin, dass die Menge $\{u, v, w, x, y\}$ jeweils durch 0 und 1 repräsentiert werden können, wobei 1 für "Im Element der Potenzmenge vorhanden" angesehen werden kann und 0 "nicht im Element der Potenzmenge vorhanden" repräsentiert. Somit hat jedes dieser Elemente zwei Möglichkeiten und es existieren fünf Elemente, also 2^5. Dies bildet die Zustände 00000_2 ($\emptyset$) bis 11111_2 ($\{u, v, w, x, y\}$) ab.

(b)

$$\begin{aligned} P(A) = \{&\emptyset, \{c\}, \{\{a, b\}\}, \{\{a, b\}, c\}, \{a\}, \{a, c\}, \{a, \{a, b\}\}, \{a, \{a, b\}, c\}, \{1\}, \{1, c\}, \\ &\{1, \{a, b\}\}, \{1, \{a, b\}, c\}, \{1, a\}, \{1, a, c\}, \{1, a, \{a, b\}\}, \{1, a, \{a, b\}, c\}\} \end{aligned}$$

$|P(P(A))| = 2^{|P(A)|} = 2^{16} = 65536$

Aufgabe (3)

(a)

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3\} \\ B &= \{a, b, c, d\} \\ A \times B &= \{(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (2, b), (2, c), (2, d), (3, a), (3, b), (3, c), (3, d)\} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} |A \times B| &= 12 \\ |B \times A| &= 12 \\ |(A \times B) \times (B \times A)| &= 12 \times 12 = 144 \end{aligned}$$

Aufgabe (4)

$M = \{1, 2, 3\}$

(a)

$$R_1 = \{(2, 3), (3, 2), (1, 1)\} \tag{1}$$
$$R_2 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 2)\} \tag{2}$$
$$R_3 = \{(1, 3), (2, 3), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\} \tag{3}$$

1
- nichtreflexiv, da $(2, 2) \notin R_1$
- symmetrisch, da für jedes $x, y \in R_1 (x, y) \wedge (y, x) \in R_1$
- nichtantisymmetrisch, da obwohl $(2, 3) \in R_1 \wedge (3, 2) \in R_1$ $2 \neq 3$

- nichttransitiv da $(1,1) \wedge (2,3)$ nicht transitiv

R_1 ist eine Abbildung, da das Urbild $\{1,2,3\}$ ist und jedes $x \in$ Urbild einem Element aus $y \in \{1,2,3\}$, dem Bild zugeordnet wird.

2
- nichtreflexiv, da $(1,1) \notin R_2$
- nichtsymmetrisch, da $(1,2) \in R_2$ aber $(2,1) \notin R_2$
- nichtantisymmetrisch, da $(2,3) \in R_2 \wedge (3,2) \in R_2$ aber $2 \neq 3$
- transitiv, da für jedes x, y, z gilt, dass wenn $(x,y) \in R_2$ dann auch $(y,z) \in R_2$

R_2 ist keine Abbildung, da das Element 3 des Urbildes $\{1,2,3\}$ auf die Elemente 2 und 3 des Bildes $\{2,3\}$ abgebildet wird.

3
- reflexiv, da für jedes $x \in$ Urbild gilt, dass $(x,x) \in R_3$
- nichtsymmetrisch, da $(2,3) \in R_3$ aber $(3,2) \notin R_3$
- antisymmetrisch, da nicht gilt, dass für beliebige Elemente $x, y \in M$ gilt dass $(x,y) \in R_3 \wedge (y,x) \in R_3$ mit der Ausnahme dass $x = y$ wie etwa in $(1,1) \in R_3$
- transitiv, da für jedes x, y, z gilt, dass wenn $(x,y) \in R_3$ dann auch $(y,z) \in R_3$

R_3 ist keine Abbildung, da das Element 1 des Urbildes $\{1,2,3\}$ auf die Elemente 1 und 3 des Bildes $\{1,2,3\}$ abgebildet wird.

(b)

$$\begin{aligned} R_1 \circ R_2 &= \{(2,3),(2,2),(3,3),(1,2)\} \\ R_2^* &= \{(1,2),(2,3),(3,3),(3,2),(1,1),(2,2)\} \\ R_3^* &= \{(1,3),(2,3),(1,1),(2,2),(3,3),(3,2),(1,2)\} \end{aligned}$$