Punkteverteilung:

1	2	3	4	Σ

Aufgabe (1)

$$
\begin{aligned}
|10\sqrt{n_0}| &\leq c \cdot n_0 && \text{Angabe} \\
10\sqrt{n_0} &\leq c \cdot n_0 && n_n \in \mathbb{N} \\
\frac{10\sqrt{n_0}}{n_0} &\leq c \\
10\frac{\sqrt{n_0}}{n_0} &\leq c \\
10n_0^{-\frac{1}{2}} &\leq c \\
n_0^{-\frac{1}{2}} &\leq \frac{c}{10} \\
\frac{1}{\sqrt{n_0}} &\leq \frac{c}{10} \\
1 &\leq \sqrt{n_0} \cdot \frac{c}{10} \\
\frac{10}{c} &\leq \sqrt{n_0} \\
\frac{100}{c^2} &\leq n_0 \\
n_0 &\geq \frac{100}{c^2} && c \in \mathbb{R} > 0
\end{aligned}
$$

Somit is n_0 gleich $\frac{100}{c^2}$. Man kann nun $n = n_0$ in die Formeln einsetzen:

$$
\begin{aligned}
\left|10\sqrt{\frac{100}{c^2}}\right| &\leq c \cdot \frac{100}{c^2} && n = n_0 \\
10\sqrt{\frac{100}{c^2}} &\leq c \cdot \frac{100}{c^2} \\
10 \cdot \frac{10}{c} &\leq \frac{100 \cdot c}{c^2} \\
\frac{100}{c} &\leq \frac{100}{c}
\end{aligned}
$$

Somit gilt diese Aussage für den kleinsten Wert von n, n_0. Zu prüfen ist noch, ob es auch für größere Werte gilt, etwa $n = \frac{100}{c^2} + 1$:

$$\begin{aligned}
\left|10\sqrt{\frac{100}{c^2}+1}\right| &\leq c\cdot\left(\frac{100}{c^2}+1\right)\\
100\cdot\left(\frac{100}{c^2}+1\right) &\leq \left(\frac{100}{c}+c\right)^2\\
\frac{100^2}{c^2}+100 &\leq \frac{100^2}{c^2}+\frac{200\cdot c}{c}+c^2\\
100 &\leq 200+c^2\\
-100 &\leq c^2
\end{aligned}$$

Das Ergebnis gilt immer, da $c > 0$ in der Angabe vorrausgesetzt wird.

Aufgabe (2)

(a)

$$\begin{aligned}
&\neg\forall c, c\in\mathbb{R}, c>0 : \exists n_0, n_n \in \mathbb{N} : \forall n, n\in\mathbb{N}, n\geq n_0 : |f(n)| \leq c\cdot g(n)\\
&\exists c, c\in\mathbb{R}, c>0 : \neg\exists n_0, n_n \in \mathbb{N} : \forall n, n\in\mathbb{N}, n\geq n_0 : |f(n)| \leq c\cdot g(n)\\
&\exists c, c\in\mathbb{R}, c>0 : \forall n_0, n_n \in \mathbb{N} : \neg\forall n, n\in\mathbb{N}, n\geq n_0 : |f(n)| \leq c\cdot g(n)\\
&\exists c, c\in\mathbb{R}, c>0 : \forall n_0, n_n \in \mathbb{N} : \exists n, n\in\mathbb{N}, n\geq n_0 : \neg(|f(n)| \leq c\cdot g(n))\\
&\exists c, c\in\mathbb{R}, c>0 : \forall n_0, n_n \in \mathbb{N} : \exists n, n\in\mathbb{N}, n\geq n_0 : |f(n)| > c\cdot g(n) \qquad \equiv **
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\left|2n_0^2\right| &> c\cdot n_0^2\\
2n_0^2 &> c\cdot n_0^2 && n_0\in\mathbb{N}, n_0>0\\
2 &> c && \text{Teilen durch } n_0^2\\
c &< 2
\end{aligned}$$

Das heißt, dass die Aussage ** für alle c gilt die größer als 0 sind (siehe Annahme in der Formel) und kleiner als 2 sind, unabhängig von der konkreten Wahl von n.

Aufgabe (3)

(a) $S = \{U, I\}$

$U = \mathbb{R}$

$I(\lhd) = \{(x,y) | x < y\}$

$z = \frac{x+y}{2}$

(b) Relation $<$ über $\mathbb{N}$ ist nicht dicht, da für $x = 1, y = 2$ kein z in der Relation $<$ existiert, so dass die Formel erfüllt wäre.

Aufgabe (4)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathcal{A} \vdash \forall x P(x) \Rightarrow Q(x)}}{\mathcal{A} \vdash P(a) \Rightarrow Q(a)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\mathcal{A} \vdash \forall x P(x)}}{\mathcal{A} \vdash P(a)}}{\dfrac{\mathcal{A} \vdash Q(a)}{\mathcal{A} \vdash \forall x Q(x)}}$$